Über die hydro-thermodynamischen Gleichungen im Falle nichthomogener Turbulenz und das Lärmproblem

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

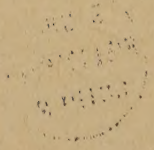
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Udo Scherz

aus Neuruppin

1965



Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

Über die hydro-thermodynamischen Gleichungen im Falle nichthomogener Turbulenz und das Lärmproblem

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

vorgelegt von

Udo Scherz

aus Neuruppin

1. Referent: Professor Dr. H. Fortak
2. Referent: Professor Dr. G. Grawert

Tag der mündlichen Prüfung: 2. März 1965
Tag der Promotion: 31. Juli 1965

Zusammenfassung

Die hydro-thermodynamischen Grundgleichungen werden zum Zwecke der numerischen Vorhersage meteorologischer Vorgänge räumlich gemittelt, wobei für die Reynoldsspannungen, die als neue Variable hinzukommen, ebenfalls Differentialgleichungen abgeleitet werden. Das so entstehende nicht geschlossene Gleichungssystem wird unter Verwendung von Ansätzen aus der Theorie der nicht-homogenen Turbulenz zu einem geschlossenen gemacht. Dieses erweiterte Gleichungssystem wird dann mit den nicht gemittelten hydrodynamischen Grundgleichungen in bezug auf den sogenannten meteorologischen Lärm verglichen. Dazu werden beide Gleichungssysteme mit Hilfe der Störungstheorie linearisiert (mit einer ruhenden isothermen Atmosphäre als o. Näherung) und es werden dann mit dem Ansatz einer ebenen Welle Dispersionsgleichungen hergeleitet, deren Lösungen für den meteorologisch interessierenden Wellenzahlbereich untersucht werden. Die nicht gemittelten, d. h. nicht erweiterten hydro-thermodynamischen Grundgleichungen ergeben dabei instabiles Verhalten, während das erweiterte Gleichungssystem stabil ist. Das gleiche wird für die beiden quasistatisch approximierten Gleichungssysteme gezeigt. Der Einfluß der kleinräumigen isotropen Turbulenz kann vernachlässigt werden.

Inhalt

		Seite
1	Einleitung	1
2	Die hydrodynamischen Grundgleichungen	5
3	Die quasistatischen Gleichungen	9
4	Die Gleichungen für die Reynolds-spannungen	11
5	Ansätze für die unbekannten Funktionen	16
6	Störungstheorie	17
7	Das Gleichungssystem der 1. Näherung im Falle einer isothermen o. Näherung ohne Wind	19
8	Ableitung der Dispersionsgleichung	22
9	Die Stabilität im Lärmbereich	26
1o	Die Stabilität im meteorologischen Bereich	28
11	Die Näherungslösungen der Dispersions-gleichung	3o
12	Die quasistatischen erweiterten Gleichungen	34
13	Der Einfluß einer o. Näherung mit konstantem Wind	37
14	Die kleinräumige isotrope Turbulenz	38
	Anhang A: Zur Berechnung der Determinanten des Abschnitts 9	41
	Anhang B: Die Abschätzungen von D_5 aus Abschnitt 9	42
	Literaturhinweise	43

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546516_0085

Über die hydro- thermodynamischen Gleichungen im Falle nichthomogener Turbulenz und das Lärmproblem

1 Einleitung

Zur numerischen Wettervorhersage werden Lösungen der hydrothermodynamischen Grundgleichungen

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{D\mathfrak{v}}{Dt} + 2\mathfrak{\Omega} \times \mathfrak{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\varphi = o \qquad {}^{x)}\\
&\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathfrak{v} = o\\
&\frac{D\Theta}{Dt} = o\\
&\Theta = \left(\frac{p_s}{p}\right)^{\varkappa} T\\
&p = \rho R T
\end{aligned}
$$

gesucht, die nur die meteorologisch wichtigen Vorgänge enthalten. Wegen der Nichtlinearität der Gleichungen spielen dabei aber auch die kleinräumigen Bewegungen eine gewisse Rolle. Bei der numerischen Integration der Gleichungen (1) mit Hilfe eines räumlichen Gitternetzes in einzelnen Zeitschritten werden alle Lösungen mit Wellenlängen kleiner als der doppelte Gitterabstand nicht mehr dargestellt, während Vorgänge mit Wellenlängen , die nur wenig größer als der doppelte Gitterabstand sind, falsch beschrieben werden. Man wählt also die Entfernung der Gitterpunkte kleiner als die meteorologische Maschenweite, die wiederum, wegen der Anfangsfelder, mit einer mittleren Entfernung der Beobachtungsstationen in Einklang stehen muß. Alle Lösungen mit Wellenlängen, die kleiner sind als die meteorologische Maschenweite und vom Gitternetz nicht mehr richtig dargestellt werden können, bezeichnen wir hier als meteorologischen Lärm. (die aber größer sind als der doppelte Gitterabstand)

Es hat sich nun erwiesen (vergl. Eliassen [1], Edelmann, Reiser [2]), daß dieser Lärm bei der numerischen Integration von (1) instabiles Verhalten zeigt, so daß er schon nach kurzer Zeit die meteorologisch wichtigen Vorgänge überdeckt, wenn er nicht durch geeignete Reibungsansätze (vergl. Edelmann, Reiser [2]) oder Mittelungsoperatoren (Filtern) unterdrückt wird. Dies gilt auch dann, wenn der Lärm aus den Anfangsfeldern sorgfältig entfernt wurde (vergl. Edelmann, Reiser [2]). Über das Lärmproblem vergl. auch die Arbeiten von Hinkelmann [3], Hollmann [4], Edelmann [5], sowie Ogura, Philipps [6].

---

x) Es bedeuten: $\mathfrak{v}$ = Windgeschwindigkeit, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\nabla$, $\mathfrak{\Omega}$ = Winkelgeschwindigkeit der Erde, ρ = Dichte, p = Druck, φ = gz, g = Erdbeschleunigung, Θ = potentielle Temperatur, $\varkappa = \frac{R}{c_p}$.

Mittelt man das Gleichungssystem (1) derart, daß die gemittelten Variablen nur die meteorologisch wichtigen Vorgänge enthalten (räumliche Mittelung), so erhält man wegen der Nichtlinearität kein geschlossenes Gleichungssystem, sondern es treten zusätzliche unbekannte Funktionen auf (Reynoldsspannungen), und die direkte Verwendung von (1) für die numerische Wettervorhersage bedeutet die Vernachlässigung dieser Glieder, sofern sie nicht durch die Reibungsansätze (z. B. Edelmann, Reiser [2]) hinreichend berücksichtigt sind. In den Gleichungen für die Reynoldsspannungen selbst, die man ebenfalls aus (1) ableitet, treten wieder neue unbekannte Funktionen auf und so fort bis zu einem unendlichen Gleichungssystem. Zu einem endlichen geschlossenen Gleichungssystem gelangt man nur mit Hilfe physikalischer Annahmen, die es gestatten, die unbekannten Funktionen durch die übrigen auszudrücken.

Wegen der sehr großen Reynoldszahlen [x]) ist praktisch die gesamte Atmosphäre turbulent (auch außerhalb einer gewissen Bodenschicht, die wir in den folgenden Überlegungen stets außer acht lassen), "wenn auch die Turbulenzenergie räumlich und zeitlich in weiten Grenzen schwankt". (Stewart [7]). Für große Wellenzahlen findet man die Turbulenz näherungsweise homogen isotrop (lokale Isotropie) und die Grenzwellenzahl kann größenordnungsmäßig etwa mit $k_{grenz} = 1om^{-1}$ angenommen werden (vergl. Stewart [7]); sie ist möglicherweise noch geringer. In den Gleichungen für die Reynoldsspannungen bedeutet diese kleinräumige isotrope Turbulenz (small scale turbulence) im wesentlichen eine Energiedissipation (vergl. Rotta [9]), von der wir in Abschnitt 14 zeigen werden, daß sie gegenüber der inhomogenen Turbulenz nur von untergeordneter Bedeutung ist. Im gesamten Zwischenbereich des Spektrums mit Wellenzahlen von k_{grenz} bis zum Lärmbereich ist die Annahme der Homogenität jedoch nicht mehr gerechtfertigt, und man wird versuchen, Ansätze aus der Theorie nichthomogener Turbulenz zu verwenden. In der vorliegenden Arbeit wollen wir einen solchen Ansatz benutzen, wie er von Rotta [9] (vergl. auch Davydov [1o], Hinze [11] und die angegebene Literatur) vorgeschlagen wurde, und das entstehende Gleichungssystem mit (1) vergleichen, um den Einfluß der nichthomogenen Turbulenz auf den meteorologischen Lärm zu untersuchen. Obwohl der beste Vergleich sicherlich ein numerisches Experiment wäre, wollen wir in der vorliegenden Arbeit das unterschiedliche Stabilitätsverhalten beider Gleichungssysteme bezüglich des meteorologischen Lärmes darstellen. Wir setzen also eine ebene Welle als kleine Störung eines Grundzustandes (o. Näherung der Störungstheorie) an und prüfen die zeitlichen Dämpfungen und

---

[x]) $Re = \frac{v \cdot L \rho}{\mu}$ mit v = charakteristische Geschwindigkeit, L = charakteristische Länge, μ = Viskosität, z. B. für $v = 1omsec^{-1}$, $L = 2 \cdot 1o^3 m$, $\rho = 1o^3 gm^{-3}$, $\mu = 2 \cdot 1o^{-2} gm^{-1} sec^{-1}$ $\curvearrowright$ $Re = 1o^9$!

Frequenzen der entstehenden Dispersionsgleichungen. Als Ergebnis erhalten wir eine Dämpfung aller Lösungen der Dispersionsgleichung im Lärmbereich bei Berücksichtigung der nichthomogenen Turbulenz (also Stabilität) und eine Verstärkung im Falle der einfachen Gleichungen (Instabilität). Damit ist gezeigt, daß das Gleichungssystem unter Einschluß der nichthomogenen Turbulenz den meteorologischen Lärm unterdrückt und damit bezüglich der numerischen Wettervorhersage eine Verbesserung von (1) darstellt. Endliche Störungen werden in dieser Arbeit nicht untersucht.

Vom Ansatz über die nichthomogene Turbulenz her stehen uns dabei zwei noch offene Parameter zur Verfügung: eine die mittlere Größe der Turbulenzelemente kennzeichnende Länge l (Mischlänge oder integral scale of turbulence) und die Turbulenzenergie e [x]) des Grundzustandes, die wir beide als Konstante ansehen wollen. Die Größe $\frac{2\pi}{l}$ wird dabei in dem oben angegebenen Wellenzahlbereich zwischen k_{grenz} und den Wellenzahlen des meteorologischen Lärms liegen. Wegen der großen Unsicherheit über die einzusetzenden Werte werden wir uns in dieser Arbeit auf bestimmte Zahlen nicht festlegen, sondern die Ergebnisse in Abhängigkeit von l und e diskutieren.

Um in den auftretenden Gleichungen einige Glieder durch größenordnungsmäßige Abschätzungen vernachlässigen zu können, müssen wir uns auf die Größenordnung der meteorologischen Maschenweite, also auf die obere Grenze für die Lärmwellenlängen, festlegen. Es sei L_z die vertikale und L_h die horizontale meteorologische Maschenweite, und wir nehmen

$$[L_h] = 2000 \text{ km} , \quad [L_z] = 2 \text{ km}$$

an (die eckige Klammer bedeutet die Größenordnung) und bezeichnen die Wellenlängen, die kleiner als diese Werte sind, als zum Lärmbereich gehörig. Dabei lassen wir die Tatsache unberücksichtigt, daß teilweise (vergl. Edelmann, Reiser [2]) mit einem 5-Schichtenmodell gerechnet wird, so daß schon der vertikale Abstand der Gitterpunkte den obigen Wert erreicht und sogar übersteigt. Bei etwas geänderten Längen L_h, L_z lauten die Abschätzungen dann ähnlich. Eine untere Grenze für den Lärmbereich wird nicht benötigt.

Die Stabilität eines numerischen Verfahrens hängt außer von den Differentialgleichungen noch von den verwendeten Differenzengleichungen, dem Gitternetz und den seitlichen und vertikalen Randbedingungen ab, die außerdem für die einzelnen Variablen verschieden lauten. Der Einfachheit halber untersuchen wir daher hier nur die Stabilität des Differentialgleichungssystems und lassen insbesondere die Randbedingunge

---

[x]) e hat die Dimension einer Geschwindigkeit zum Quadrat.

unbeachtet. Dies ist umso eher gerechtfertigt, als es uns nur auf einen Vergleich zwischen verschiedenen Gleichungssystemen ankommt.

In den Abschnitten 2 und 3 werden von (1) und den quasistatischen Gleichungen die Dispersionsgleichungen und deren Lösungen bestimmt, danach werden in Abschnitt 4 die Gleichungen für die Reynoldsspannungen hergeleitet und in 5 die Ansätze für die nichthomogene Turbulenz eingesetzt. In den Abschnitten 6,7 und 8 wird mit Hilfe der Störungstheorie die Dispersionsgleichung abgeleitet, und in Abschnitt 9 und 1o wird die Stabilität im Lärmbereich und im meteorologischen Bereich untersucht. In Abschnitt 11 werden Näherungslösungen der Dispersionsgleichungen angegeben und in Abschnitt 12 die Rechnungen mit den quasistatischen erweiterten Gleichungen wiederholt. In den letzten beiden Abschnitten werden die Einflüsse einer geänderten o. Näherung der Störungstheorie und der kleinräumigen isotropen Turbulenz geprüft.

2 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Zum Vergleich mit den später abzuleitenden erweiterten Gleichungen untersuchen wir zunächst das Verhalten von (1) gegenüber kleinen Störungen ohne Beachtung der Randbedingungen. Anwenden der Störungstheorie auf (1) mit der isothermen o. Näherung ohne Wind

$$\mathbf{v}_o = o, \quad p_o = p_s e^{-\frac{gz}{RT_o}}, \quad T_o = \text{const}, \quad \rho_o = \frac{p_o}{RT_o}, \quad \Theta_o = \left(\frac{p_s}{p_o}\right)^{\varkappa} T_o$$

ergibt bei Vernachlässigung der Horizontalkomponente der Erdrotation die linearen Gleichungen der 1. Näherung ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}_1 + \cdots$, $p = p_o + p_1 + \cdots$, $T = T_o + T_1 + \cdots$, $\rho = \rho_o + \rho_1 + \cdots$, $\Theta = \Theta_o + \Theta_1 + \cdots$):

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v}_1 + \frac{1}{\rho_o}\nabla p_1 - \frac{\rho_1}{\rho_o}\nabla p_o = o \\ &\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_o \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \rho_o = o \\ &\frac{\partial \Theta_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \Theta_o = o \\ &p_1 = \rho_o R T_1 + \rho_1 R T_o \\ &\Theta_1 = T_1\left(\frac{p_s}{p_o}\right)^{\varkappa} - T_o\left(\frac{p_s}{p_o}\right)^{\varkappa}\varkappa\frac{p_1}{p_o}. \end{aligned}$$

(f = Coriolisparameter)

Führt man die neuen Variablen $p = \frac{p_1}{p_o}$, $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_o}$, $T = \frac{T_1}{T_o}$, $\Theta = \frac{\Theta_1}{\Theta_o}$

ein und schreibt $\mathbf{v}$ statt $\mathbf{v}_1$, so folgt wegen $\mathbf{v}_1 \cdot \nabla = w_1 \frac{\partial}{\partial z}$, angewandt auf eine o. Näherung:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v}_h + RT_o \nabla_h p = o \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + RT_o \frac{\partial p}{\partial z} - gp + g\rho = o \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{g}{RT_o} w = o \\ &(1-\varkappa)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g\varkappa}{RT_o} w = o, \end{aligned}$$

wobei die beiden letzten Gleichungen von (2)

$$p = T + \rho \quad \text{und} \quad \Theta = T - \varkappa p$$

bereits eingesetzt sind. Da alle Koeffizienten dieses Differentialgleichungssystems Konstante sind, erfüllen alle Variablen dieselbe Differentialgleichung. Wir eliminieren zunächst $\mathbf{v}_h$:

Seien $D = \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h$, $\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla_h \times \mathbf{v}_h$

Divergenz und Vorticity des horizontalen Windes, so folgt aus der ersten Gleichung von (3)

$$\frac{\partial D}{\partial t} - f\zeta + RT_o \nabla_h^2 p = o \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + fD = o \,.$$

Also: $$AD = - RT_o \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p \quad \text{mit} \quad A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \,.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (3) folgt:

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} - RT_o \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 p + A \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{g}{RT_o} Aw = o \,.$$

Mit der Adiabatengleichung (3)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (1 - \varkappa) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{g\varkappa}{RT_o} w$$

läßt sich ρ eliminieren, und man erhält die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + RT_o \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial z} - \varkappa g \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\varkappa g^2}{RT_o} w = o$$

$$(1 - \varkappa) A \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{g\varkappa}{RT_o} Aw - RT_o \nabla_h^2 \frac{\partial p}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{g}{RT_o} Aw = o$$

Anwenden von

$$A - RT_o \gamma \nabla_h^2$$

auf die erste und

$$RT_o \gamma \frac{\partial}{\partial z} - \gamma \varkappa g$$

auf die zweite Gleichung liefert wegen der Vertauschbarkeit der Operatoren nach Subtraktion wegen $1 - \varkappa = \frac{1}{\gamma} = \frac{c_v}{c_p}$ die gesuchte Differentialgleichung: (vergl. Hollmann [4])

$$(4) \quad \left[\frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f^2 - c^2 \nabla^2 + g\gamma \frac{\partial}{\partial z}) - f^2 (c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - g\gamma \frac{\partial}{\partial z}) - g^2 \varkappa \gamma \nabla_h^2 \right] w = o$$

mit $$c = \sqrt{RT_o \gamma} = \text{Schallgeschwindigkeit.}$$

Mit dem Ansatz

$$w(\mathbf{r},t) = w_o \exp\left\{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} + Rt\right\} \tag{5}$$

erhält man die biquadratische Gleichung

$$R^4 + aR^2 + b = o$$

mit

$$a = f^2 + c^2K^2 + ig\gamma k \quad ,$$

$$b = f^2c^2k^2 + g^2\varkappa\gamma K_h^2 + if^2g\gamma k \quad ,$$

$$\mathbf{K} = (k_x, k_y, k), \qquad K^2 = \mathbf{K}\cdot\mathbf{K}$$

$$K_h^2 = k_x^2 + k_y^2$$

und der Lösung

$$R^2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad ,$$

oder

$$R^2 = \frac{-a_r}{2} - i\frac{a_i}{2} \pm \sqrt{\frac{a_r^2 - a_i^2}{4} - b_r + i\left(\frac{1}{2}a_r a_i - b_i\right)}$$

mit

$$a_r = c^2K^2 + f^2; \qquad b_r = f^2c^2k^2 + g^2\varkappa\gamma K_h^2$$

$$a_i = g\gamma k \quad ; \quad b_i = f^2g\gamma k \quad .$$

Zur größenordnungsmäßigen Abschätzung setzen wir für den Coriolisparameter f:

$$[f^2] = 1o^{-9}\,\mathrm{sec}^{-2}$$ (die eckige Klammer bedeutet die Größenordnung) .

Das Verhältnis von vertikaler Maschenweite L_z zu horizontaler L_h sei

$$\varepsilon = \frac{L_z}{L_h} \ll 1 \quad \text{mit} \quad [\varepsilon] = 1o^{-3} \quad \text{(vergl. Abschnitt 1)} .$$

Wir bezeichnen die Grenzwellenzahlen für den meteorologischen Lärm mit dem Index Null und erhalten (vergl. Abschnitt 1):

$$k_z^o = \frac{2\pi}{L_z} \quad \text{und} \quad [k_z^{o\,2}] = 1o^{-5}\,\mathrm{m}^{-2}$$

$$K_h^o = \frac{2\pi}{L_h} = \varepsilon k_z^o \quad \text{und} \quad [K_h^{o\,2}] = 1o^{-11}\,\mathrm{m}^{-2} \quad .$$

Für die Schallgeschwindigkeit c und die Erdbeschleunigung g setzen wir außerdem

$$[c^2] = 1o^5\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{sec}^{-2} \quad , \quad [g] = 1o\,\mathrm{m\,sec}^{-2}$$

fest. Um die Störungen im Lärmbereich zu untersuchen, müssen wir die unterschiedlichen Längenverhältnisse in horizontaler und vertikaler Richtung berücksichtigen und setzen daher

$$[K_h^2] = [\varepsilon^2 k^2] = 1o^{-6}[k^2] \quad , \tag{5a}$$

mit

$$K_h^o \leqslant K_h \quad , \quad k_z^o \leqslant k$$

im Lärmbereich.

Mit diesen Zahlenwerten können einige Glieder in R^2 vernachlässigt werden. Wegen

$$\left[\frac{f^2 c^2 k^2}{a_r^2}\right] = \left[\frac{f^2 c^2 k^2}{c^4 K^4}\right] \leqslant \left[\frac{f^2}{c^2 k_z^{o\,2}}\right] = 1o^{-9} \qquad x_1)$$

und

$$\left[\frac{g^2 \varkappa \gamma K_h^2}{c^4 K^4}\right] \leqslant \left[\frac{g^2 \varepsilon^2}{c^4 k_z^{o\,2}}\right] = 1o^{-9}$$

kann man b_r gegen a_r^2 vernachlässigen und ebenso b_i gegen $a_r a_i$:

$$\left[\frac{b_i}{a_r a_i}\right] = \left[\frac{f^2}{c^2 K^2}\right] \leqslant \left[\frac{f^2}{c^2 k_z^{o\,2}}\right] = 1o^{-9} \quad .$$

Die Lösungen sind also genähert

$$R^2 = o \qquad \text{und} \qquad R^2 = -(a_r + i a_i)$$

oder

$$\mathrm{Re}(R) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c^4 K^4 + g^2 \gamma^2 k^2} - c^2 K^2} \simeq \mp cK \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g^2 \gamma^2 k^2}{c^4 K^4}} \simeq \mp \frac{g\gamma}{2c} \qquad x_2)$$

denn es ist

$$\left[\frac{g^2 \gamma^2 k^2}{c^4 K^4}\right] = \left[\frac{g^2}{c^4 K^2}\right] \leqslant 1o^{-3} \quad .$$

Ferner wird

$$\mathrm{Im}(R) = \pm \frac{cK}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{g^2 \gamma^2 k^2}{c^4 K^4}} + 1} \simeq \pm cK \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{g^2 \gamma^2}{c^4 K^2}} \simeq \pm cK \left(1 + \frac{1}{8} \frac{g^2 \gamma^2}{c^4 K^2}\right) .$$

---

x1) $[K^2] = [K_h^2 + k^2] = [k^2]$

x2) Es bedeuten Re(R) bzw. Im(R) den Real- bzw. den Imaginärteil von R.

Damit gibt es also im Lärmbereich instabile Lösungen, d. h. mit positivem Re(R), deren Phasengeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist. Die Größenordnung des Verstärkungsfaktors ist

$$\left[\frac{g\gamma}{2c}\right] = 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{sec}^{-1} \quad ,$$

d. h. in etwa einer Minute haben die Amplituden den e-fachen Wert erreicht. Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, daß die Annahme der quasistatischen Approximation diese unerwünschten Schallschwingungen eliminiert. (Vergl. dazu auch Edelmann [5].)

3 Die quasistatischen Gleichungen

Führt man in (1) die quasistatische Approximation ein (d. h. Vernachlässigung der Vertikalgeschwindigkeit in der z-Komponente der Bewegungsgleichung und der Horizontalkomponente der Erdrotation), so lauten die (3) analogen Gleichungen für die 1. Näherung der Störungsrechnung:

$$\frac{\partial w_h}{\partial t} + f\mathbf{k}\times\mathbf{v}_h + RT_o\nabla_h p = o$$

$$RT_o\frac{\partial p}{\partial z} - gp + g\rho = o$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_h\cdot\mathbf{v}_h + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{g}{RT_o}w = o$$

$$(1-\varkappa)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g\varkappa}{RT_o}w = o \quad .$$

Elimination von $\nabla\cdot\mathbf{v}_h$ und ρ liefert:

$$RT_o\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial z} - \varkappa g\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\varkappa g^2}{RT_o}w = o$$

$$(1-\varkappa)A\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{g\varkappa}{RT_o}Aw - RT_o\nabla_h^2\frac{\partial p}{\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{g}{RT_o}Aw = o \quad ,$$

und es folgt auf gleiche Weise wie oben:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - g\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right) + f^2\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - g\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right) + g^2\varkappa\gamma\nabla_h^2\right]w = o \quad .$$

Wir machen wieder den Ansatz einer ebenen Welle (5) und erhalten:

$$R^2(c^2k^2 + ig\gamma k) + f^2(c^2k^2 + ig\gamma k) + g^2\varkappa\gamma K_h^2 = o$$

oder

$$R^2 = -f^2 - g^2\varkappa\gamma K_h^2\frac{c^2k^2 - ig\gamma k}{c^4k^4 + g^2\gamma^2k^2} \quad .$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{Re}(R) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(f^2+\frac{g^2\varkappa\delta c^2K_h^2}{c^4k^2+g^2\delta^2})^2+\frac{g^6(\varkappa\delta^2)^2K_h^4k^2}{(c^4k^4+g^2\delta^2k^2)^2}}-(f^2+\frac{g^2\varkappa\delta c^2K_h^2}{c^4k^2+g^2\delta^2})}.$$

In der inneren Wurzel ist der zweite Term klein gegen den ersten, denn es ist

$$\left[\frac{g^6K_h^4k^2(\varkappa\delta^2)^2}{(g^2\varkappa\delta c^2K_h^2k^2)^2}\right] = \left[\frac{g^2}{c^4k^2}\right] \leqslant \left[\frac{g^2}{c^4k_z^{o\,2}}\right] = 1o^{-3} \quad ,$$

und es folgt:

$$\mathrm{Re}(R) \simeq \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g^6(\varkappa\delta^2)^2K_h^4k^2}{(c^4k^4+g^2\delta^2k^2)^2}(f^2+\frac{g^2\varkappa\delta c^2K_h^2}{c^4k^2+g^2\delta^2})^{-1}} \quad ,$$

und wegen

$$\left[\frac{g^2\delta^2}{c^4k^2}\right] \leqslant \left[\frac{g^2}{c^4k_z^{o\,2}}\right] = 1o^{-3} \quad \text{und} \quad \left[\frac{g^2\varkappa\delta c^2K_h^2k^2}{f^2c^4k^4}\right] = \left[\frac{g^2\varepsilon^2}{f^2c^2}\right] = 1$$

erhält man

$$[\mathrm{Re}(R)] = \left[\frac{g^3K_h^2k(\varkappa\delta^2)c^2k}{2c^4k^4\cdot gcK_h}\right] < \left[\frac{g^2\varepsilon}{2c^3k_z^o}\right] = \frac{1}{2}\,1o^{-6}\,\mathrm{sec}^{-1} \quad .$$

Zum Vergleich ergab sich der Verstärkungsfaktor aus den vollen Gleichungen (1) größenordnungsmäßig zu

$$2\cdot 1o^{-2}\,\mathrm{sec}^{-1} \quad .$$

Die quasistatischen Gleichungen sind also in bezug auf die Stabilität im Lärmbereich (1) unbedingt vorzuziehen, da die Einführung der quasistatischen Approximation für die meteorologisch wichtigen Bewegungen gerechtfertigt ist (vergl. Charney [12]).

Die Frequenz der Lärmwellen im quasistatischen Fall ergibt sich aus

$$\mathrm{Im}(R) \simeq \pm\sqrt{f^2+\frac{g^2\varkappa\delta c^2K_h^2}{c^4k^2+g^2\delta^2}}\left[1+\frac{g^6(\varkappa\delta^2)^2K_h^4k^2}{8(c^4k^4+g^2\delta^2k^2)^2}(f^2+\frac{g^2\varkappa\delta c^2K_h^2}{c^4k^2+g^2\delta^2})^{-2}\right],$$

und es folgt ohne Berücksichtigung der Corioliskraft:

$$[\mathrm{Im}(R)] = \left[\frac{g\sqrt{\varkappa\delta}cK_hk}{c^2k}\right] = \left[\frac{g\varepsilon}{c}\right] = 3\cdot 1o^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1} \quad ,$$

d. h. die Schwingungsdauer beträgt größenordnungsmäßig $2\cdot 1o^5$ sec.

Daraus ergibt sich eine Phasengeschwindigkeit für Wellen mit horizontaler Ausbreitungsrichtung von

$$\left[c^{h}_{Phase}\right] = \left[\frac{Im(R)}{K_h}\right] < \left[\frac{Im(R)}{K^{o}_{h}}\right] = 1o\ m\ sec^{-1}$$

und für Wellen mit vertikaler Ausbreitungsrichtung

$$\left[c^{z}_{Phase}\right] = \left[\frac{Im(R)}{k}\right] < \left[\frac{Im(R)}{k^{o}_{z}}\right] = 1o^{-2}\ m\ sec^{-1}\ ,$$

die beide wesentlich kleiner als die Schallgeschwindigkeit sind.

Bei Berücksichtigung der Randbedingungen oben und unten ergeben sich jedoch noch Wellen anderer Art als die hier abgeleiteten (vergl. Hollmann [4]), die für das Lärmproblem wichtig sind; denn die Verstärkungsdauer der oben abgeleiteten Wellen um den Faktor e liegt ja bei $2 \cdot 1o^{6}$ sec oder ca 2o Tagen. Uns kommt es hier jedoch im wesentlichen nur auf einen Vergleich an zwischen dem Gleichungssystem mit Berücksichtigung der nichthomogenen Turbulenz und (1), sowie zwischen beiden Gleichungssystemen bei Einführung der quasistatischen Approximation. Eine genaue Analyse aller möglichen Störungswellen der vier Gleichungssysteme kann hier nicht angegeben werden. Wir werden jedoch zeigen, daß die Dispersionsgleichungen ohne Berücksichtigung der Randbedingungen für die Gleichungen der nichthomogenen Turbulenz im Lärmbereich nur gedämpfte Lösungen zulassen, wenn die beiden Parameter l und e in gewissen Grenzen liegen.

4 Die Gleichungen für die Reynoldsspannungen

Wir führen einen räumlichen Mittelungsoperator derart ein, daß die gemittelten Größen nur die meteorologisch wichtigen Vorgänge enthalten und fordern die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha A + \beta B} = \alpha\bar{A} + \beta\bar{B} \\ &\overline{A\bar{B}} = \bar{A}\bar{B} \\ &\overline{DA} = D\bar{A} \\ &\overline{A^{-1}} = \bar{A}^{-1} \end{aligned} \qquad \text{x)}$$

wobei A, B Variable und α, β Konstante bezeichnen. D sei ein Differentialoperator ∇ oder $\frac{\partial}{\partial t}$ xx) .

Auf die Problematik verschiedener Mittelungen sowie dieser Eigenschaften der Mittelungsoperatoren kann hier nicht eingegangen werden. Die Beziehungen müssen jedoch im Bereich der meteorologisch

x) Es folgt $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. xx) Es folgt dann $\overline{D^{n}A} = D^{n}\bar{A}$.

wichtigen Vorgänge mit hinreichender Genauigkeit gelten.
Wir definieren dann:

$$\rho' \underset{\text{Def.}}{=} \rho - \overline{\rho} \quad , \quad p' \underset{\text{Def.}}{=} p - \overline{p} \qquad \text{mit } \overline{p'} = \overline{\rho'} = o$$

$$\hat{\mathfrak{v}} \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\overline{\rho}} \overline{\rho \mathfrak{v}} \quad , \quad \hat{T} \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\overline{\rho}} \overline{\rho T} \quad , \quad \hat{\Theta} \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\overline{\rho}} \overline{\rho \Theta}$$

$$\mathfrak{v}' \underset{\text{Def.}}{=} \mathfrak{v} - \hat{\mathfrak{v}} \quad , \quad T' \underset{\text{Def.}}{=} T - \hat{T} \quad , \quad \Theta' \underset{\text{Def.}}{=} \Theta - \hat{\Theta}$$

mit $\overline{\rho \mathfrak{v}'} = \overline{\rho T'} = \overline{\rho \Theta'} = o$ und $\hat{\hat{\mathfrak{v}}} = \hat{\mathfrak{v}}$, $\hat{\hat{T}} = \hat{T}$, $\hat{\hat{\Theta}} = \hat{\Theta}$, $\hat{\overline{\mathfrak{v}}} = \overline{\mathfrak{v}}$, usw..
Nun ist

$$D\hat{A} = D(\overline{\frac{\rho}{\rho} A}) = \overline{\frac{\rho}{\rho} DA} + \overline{AD \frac{\rho}{\rho}} = (D\hat{A}) + \overline{AD \frac{\rho'}{\rho}} \simeq (D\hat{A}) \ ,$$

denn nach Godske, Bergeron, Bjerknes, Bundgaard [3] (S. 423) sind die turbulenten Dichteschwankungen in der Atmosphäre allgemein sehr klein

$$\left[\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\right] \ll 1$$

und insbesondere gegen die turbulenten Windschwankungen zu vernachlässigen.
Das gleiche gilt für die räumlichen Ableitungen dieser Größen.
Im folgenden verzichten wir daher auf die Effekte, die auf den turbulenten Dichteschwankungen beruhen, und nehmen an, daß der Differentialoperator auch mit dem "gewogenen Mittelungsoperator" vertauscht werden darf, d. h. $D\hat{A} = (D\hat{A})$.

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung[4] erhalten wir

$$\rho \frac{D\Psi}{Dt} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathfrak{v} \Psi) \quad \text{mit } \Psi \text{ beliebig} \tag{6}$$

und damit aus (1) nach Multiplikation mit ρ und Anwenden des Mittelungsoperators:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho} \hat{\mathfrak{v}} + \nabla \cdot (\overline{\rho \mathfrak{v} \mathfrak{v}}) + \overline{\rho}\, 2\mathfrak{Q} \times \hat{\mathfrak{v}} + \nabla \overline{p} + \overline{\rho} \nabla \Phi = o \\
&\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho} + \nabla \cdot (\overline{\rho} \hat{\mathfrak{v}}) = o \\
&\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho} \hat{\Theta} + \nabla \cdot (\overline{\rho \mathfrak{v} \Theta}) = o \\
&\overline{\rho} \hat{\Theta} = \frac{1}{R} p_s^{\varkappa} \overline{p}^{1-\varkappa} \\
&\overline{p} = \overline{\rho} R \hat{T} \quad .
\end{aligned} \tag{7}$$

Mit Hilfe von

$$\overline{\rho \mathfrak{v} \mathfrak{v}} = \overline{\rho} \hat{\mathfrak{v}} \hat{\mathfrak{v}} + \overline{\rho \mathfrak{v}' \mathfrak{v}'}$$

sollen jetzt die Gleichungen für den Reynoldsschen Spannungstensor $\overline{\rho v' v'}$ abgeleitet werden (vergl. etwa Hinze [11]): Wir addieren die beiden Gleichungen

$$(8)\qquad \frac{\partial \rho \mathfrak{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \mathfrak{v}\mathfrak{v}) + \rho 2\Omega \times \mathfrak{v} + \nabla p + \rho \nabla \varphi = o$$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\nabla \mathfrak{v} + 2\Omega \times \mathfrak{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla \varphi = o$$

nach Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ von links bzw. mit $\rho\mathfrak{v}$ von rechts und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathfrak{v}\mathfrak{v}) + \nabla\cdot(\rho \mathfrak{v}\mathfrak{v}\mathfrak{v}) + \rho \mathfrak{v} 2\Omega \times \mathfrak{v} + 2\Omega \times \mathfrak{v}\rho\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\nabla p + (\nabla p)\mathfrak{v} + \rho\mathfrak{v}\nabla\varphi + (\nabla\varphi)\rho\mathfrak{v} = o$$

und wegen

$$\overline{\rho \mathfrak{v}\mathfrak{v}\mathfrak{v}} = \bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}} + \hat{\mathfrak{v}}\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} + \overline{\rho \mathfrak{v}'\hat{\mathfrak{v}}\mathfrak{v}'} + \overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'\hat{\mathfrak{v}}} + \overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}$$

ergibt die Mittelung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}}) + \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}) + \nabla\cdot(\bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}}) + \nabla\cdot(\hat{\mathfrak{v}}\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}) + \nabla\cdot(\overline{\rho \mathfrak{v}'\hat{\mathfrak{v}}\mathfrak{v}'}) + \nabla\cdot(\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'\hat{\mathfrak{v}}}) +$$

$$(9)\qquad + \nabla\cdot(\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}) + 2\Omega \times \rho \hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}} - \rho \hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}} \times 2\Omega + 2\Omega \times \overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} - \overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} \times 2\Omega +$$

$$+ \hat{\mathfrak{v}}\nabla\bar p + (\nabla\bar p)\hat{\mathfrak{v}} + \overline{\mathfrak{v}'\nabla p'} + \overline{(\nabla p')\mathfrak{v}'} + \bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\nabla\varphi + (\nabla\varphi)\bar\rho\hat{\mathfrak{v}} = o \quad .$$

Wir mitteln die beiden Gleichungen (8):

$$(10)\qquad \frac{\partial \bar\rho \hat{\mathfrak{v}}}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}}) + \nabla\cdot(\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}) + \bar\rho 2\Omega \times \hat{\mathfrak{v}} + \nabla\bar p + \bar\rho\nabla\varphi = o$$

$$\frac{\partial \hat{\mathfrak{v}}}{\partial t} + \hat{\mathfrak{v}}\cdot\nabla\hat{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\bar\rho}\nabla\cdot(\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}) + 2\Omega \times \hat{\mathfrak{v}} + \frac{1}{\bar\rho}\nabla\bar p + \nabla\varphi = o \ ,$$

denn mit der Kontinuitätsgleichung (7) erhält man

$$(11)\qquad \bar\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\cdot\nabla\Psi = \frac{\partial \bar\rho \Psi}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\Psi) \quad ,$$

und addieren sie nach Multiplikation mit $\hat{\mathfrak{v}}$ von links bzw. mit $\bar\rho\hat{\mathfrak{v}}$ von rechts

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}}) + \nabla\cdot(\hat{\mathfrak{v}}\bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\hat{\mathfrak{v}}) + \hat{\mathfrak{v}}\nabla\cdot(\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}) + (\nabla\cdot\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'})\hat{\mathfrak{v}} + \bar\rho\hat{\mathfrak{v}}2\Omega \times \hat{\mathfrak{v}} +$$

$$+ 2\Omega \times \hat{\mathfrak{v}}\bar\rho\hat{\mathfrak{v}} + \hat{\mathfrak{v}}\nabla\bar p + (\nabla\bar p)\hat{\mathfrak{v}} + \bar\rho\hat{\mathfrak{v}}\nabla\varphi + \nabla\varphi\bar\rho\hat{\mathfrak{v}} = o$$

und subtrahieren dies von (9):

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} + \nabla\cdot(\hat{\mathfrak{v}}\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}) + \hat{\mathfrak{v}}\overleftarrow{\nabla}\cdot\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} + \overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}\cdot\nabla\hat{\mathfrak{v}} + \nabla\cdot\overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} +$$

$$+ 2\Omega \times \overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} - \overline{\rho \mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} \times 2\Omega + \overline{\mathfrak{v}'\nabla p'} + \overline{(\nabla p')\mathfrak{v}'} = o \ . \qquad [x])$$

Außerdem bestimmen wir noch eine Gleichung für den Vektor

$$\overline{\rho \mathfrak{v}\Theta} = \bar\rho \hat{\mathfrak{v}}\hat\Theta + \overline{\rho \mathfrak{v}'\Theta'}$$

aus der Adiabatengleichung (7). Aus (1) und der ersten Gleichung

---

[x]) $\overleftarrow{\nabla}$ bedeutet, daß der Operator nach links anzuwenden ist.

von (8)

$$\rho v \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \rho v v \cdot \nabla \Theta = o$$

(13)

$$\Theta \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \Theta \nabla \cdot (\rho v v) + \Theta \rho 2\Omega \times w + \Theta \nabla p + \rho \Theta \nabla \varphi = o$$

erhält man durch Addition

$$\frac{\partial \rho v \Theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v v \Theta) + 2\Omega \times \rho v \Theta + \Theta \nabla p + \rho \Theta \nabla \varphi = o$$

und Mittelung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\hat{v}\hat{\Theta}) + \frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho v'\Theta'} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\hat{v}\hat{v}\hat{\Theta}) + \nabla \cdot \overline{\rho v'v'\Theta'} + \nabla \cdot \hat{\Theta}\overline{\rho v'v'} +$$

(14)

$$+ \nabla \cdot \hat{v}\overline{\rho v'\Theta'} + \nabla \cdot (\overline{\rho v'\Theta'}\hat{v}) + 2\Omega \times \bar{\rho}\hat{v}\hat{\Theta} + 2\Omega \times \overline{\rho v'\Theta'} + \hat{\Theta}\nabla\bar{p} +$$

$$+ \overline{\Theta'\nabla p'} + \bar{\rho}\hat{\Theta}\nabla\varphi = o \quad .$$

Die Adiabatengleichung (1) ergibt mit (6)

$$\frac{\partial \rho \Theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \Theta) = o \quad ,$$

und durch Mitteln erhält man

$$\frac{\partial \bar{\rho}\hat{\Theta}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\hat{v}\hat{\Theta}) + \nabla \cdot (\overline{\rho v'\Theta'}) = o$$

oder mit Hilfe von (11)

$$\frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial t} + \hat{v} \cdot \nabla \hat{\Theta} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\overline{\rho v'\Theta'}) = o \quad .$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\bar{\rho}\hat{v}$ und addieren sie zu der mit $\hat{\Theta}$ multiplizierten ersten Gleichung (1o) und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\hat{v}\hat{\Theta}) + \nabla \cdot (\bar{\rho}\hat{v}\hat{v}\hat{\Theta}) + \hat{\Theta}\nabla \cdot \overline{\rho v'v'} + \hat{v}\nabla \cdot \overline{\rho v'\Theta'} + 2\Omega \times \bar{\rho}\hat{v}\hat{\Theta} + \hat{\Theta}\nabla\bar{p} +$$

$$+ \bar{\rho}\hat{\Theta}\nabla\varphi = o \quad .$$

Subtrahiert man diese Gleichung von (14), so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho v'\Theta'} + \nabla \cdot (\hat{v}\overline{\rho v'\Theta'}) + \nabla \cdot (\overline{\rho v'v'\Theta'}) + \overline{\rho v'\Theta'} \cdot \nabla\hat{v} + \overline{\rho v'v'} \cdot \nabla\hat{\Theta} +$$

(15)

$$+ 2\Omega \times \overline{\rho v'\Theta'} + \overline{\Theta'\nabla p'} = o \quad .$$

Unter Verwendung von (11) erhält man aus (7) zusammen mit (12) und (15) das gesuchte Gleichungssystem, wenn noch $\overline{p^{(1-\varkappa)}} = \bar{p}^{(1-\varkappa)}$ gesetzt wird. Dabei bedeutet

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{v} \cdot \nabla \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = (\delta_{\mu\nu}) = \text{Einheitstensor.}$$

(a) $$D\hat{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\rho v'v'} + 2\Omega \times \hat{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla\bar{p} + \nabla\varphi = o$$

(b) $$D\bar{\rho} + \bar{\rho}\nabla \cdot \hat{v} = o$$

(c) $$D\hat{\Theta} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\rho v'\Theta'} = o$$

(d) $\hat{\Theta} = (\frac{p_s}{\bar{p}})^{\varkappa} \hat{T}$

(e) $\bar{p} = \bar{\rho} R \hat{T}$ (16)

(f) $\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho v'_i v'} + \nabla\cdot(\hat{\vec{v}}\overline{\rho v'_i v'}) + \overline{\rho w' v'_i}\cdot\nabla\hat{\vec{v}} + \hat{\vec{v}}\overleftarrow{\nabla}\cdot\overline{\rho v'_i v'} + 2\Omega \times \overline{\rho v'_i v'} - {}^{x)}$
$- \overline{\rho v'_i v'} \times 2\Omega - \overline{p'\nabla v'_i} - \overline{v'\overleftarrow{\nabla} p'_i} + \nabla\cdot(\overline{\rho v'_i v' v'} + \overline{E p' v'_i}) +$
$+ (\overline{p' v'_i} E)\cdot\overleftarrow{\nabla} = o$

(g) $\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho v'_i \Theta'} + \nabla\cdot(\hat{\vec{v}}\overline{\rho v'_i \Theta'}) + \overline{\rho w' \Theta'}\cdot\nabla\hat{v}_i + \overline{\rho v'_i w'}\cdot\nabla\hat{\Theta} + 2\Omega \times \overline{\rho w' \Theta'} +$
$+ \nabla\cdot\overline{\rho v'_i w' \Theta'} + \overline{\Theta' \nabla p'_i} = o \quad .$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder von (16f) kann man sich durch Betrachten der zugehörigen Energiegleichung veranschaulichen, vergl. Eliassen [1], Hinze [11], Rotta [9], Davydov [10]. Man erhält aus (16f) (mit v_i = i-Komponente von $\vec{v}$) die Gleichung für die Turbulenzenergie in einer Achsenrichtung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\frac{1}{2}\rho v_i'^2} + \hat{\vec{v}}\cdot\nabla\overline{\frac{1}{2}\rho v_i'^2} + \overline{\frac{1}{2}\rho v_i'^2}\,\nabla\cdot\hat{\vec{v}} + \overline{\rho v'_i w'}\cdot\nabla\hat{v}_i - \overline{p'\frac{\partial v'_i}{\partial x_i}} + \qquad {}^{xx)}$$
$$+ 2\overline{(\Omega \times w')\cdot e_i \rho v'_i} + \nabla\cdot\overline{(w'\frac{1}{2}\rho v_i'^2 + e_i p' v'_i)} = o \quad ,$$

wobei e_i den Einheitsvektor in i-Richtung bezeichnet.

Die ersten beiden Terme bezeichnen die Änderung der kinetischen Schwankungsenergie in der iten Achsenrichtung. Der dritte Term gibt die Änderung der Energie durch Dichteänderungen an, der vierte durch Arbeit der Reynoldsspannungen mit der mittleren Strömung und der sechste durch die Coriolis-Kräfte. Der fünfte Term bedeutet einen Energieaustausch mit anderen Schwankungskomponenten und mit der inneren Energie, während der letzte die turbulente Energiediffusion beschreibt.

Die Gleichung für die gesamte Turbulenzenergie lautet dagegen

mit $v'^2 \underset{\text{Def.}}{=} w'\cdot w'$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\vec{v}}\cdot\nabla)\overline{\frac{1}{2}\rho v'^2} + \overline{\frac{1}{2}\rho v'^2}\nabla\cdot\hat{\vec{v}} + \overline{\rho w' v'}\cdot\cdot\nabla\hat{\vec{v}} - \overline{p'\nabla\cdot v'} + \nabla\cdot\overline{(w'\frac{1}{2}\rho v'^2 + p' v')} = o,$$

und der erste Term bedeutet die Änderung der kinetischen Gesamt-Turbulenzenergie, während der zweite Term den Energieaustausch mit der mittleren Strömung durch Dichteänderungen der mittleren Strömung angibt. Der dritte Term bezeichnet wieder die Arbeit der Reynoldsspannungen mit der mittleren Strömung und der vierte Term den Energieaustausch zwischen Turbulenzenergie und innerer Energie; dieser ist nur von untergeordneter Bedeutung, da er von den

x) $\overleftarrow{\nabla}$ bedeutet, daß der Operator nach links anzuwenden ist.

xx) Keine Summation über doppelte Zeiger.

turbulenten Dichteschwankungen abhängt. Aus den Kontinuitätsgleichungen (1) und (7) folgt nämlich

$$(17) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\bar{D}\bar{\rho}}{Dt} + \nabla\cdot\mathfrak{v}' = o \quad \text{mit} \quad \frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathfrak{v}}\cdot\nabla \ .$$

Der fünfte Term gibt wieder die turbulente Energiediffusion an. Die Corioliskräfte treten in dieser Gleichung nicht auf.

5 Ansätze für die unbekannten Funktionen

Das nicht geschlossene Gleichungssystem (16) enthält die folgenden unbekannten Funktionen:

$$\overline{\rho\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}, \quad \overline{p'\mathfrak{v}'}, \quad \overline{p'\nabla\mathfrak{v}'}, \quad \overline{\rho\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'\Theta'} \quad \text{und} \quad \overline{\Theta'\nabla p'} \ ,$$

von denen die ersten beiden in dem Energiediffusionsterm enthalten sind. Mit Rotta [9], Hinze [12], Davydov [10] nehmen wir an, daß der dritte Ausdruck den wichtigsten Beitrag für die turbulenten Bewegungen liefert, da er die "Wechselwirkung" von Geschwindigkeitsschwankungen mit Druckschwankungen beschreibt. Wegen der Kleinheit der Dichteschwankungen (vergl. Abschnitt 4) wollen wir

$$(18) \qquad \nabla\cdot\mathfrak{v}' = o$$

annehmen (vergl. (17)) und können dann den von Rotta [9] für inkompressible Medien vorgeschlagenen Ansatz (vergl. auch Davydov [10], Hinze [11])

$$(19) \qquad \overline{p'(\nabla\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'\overleftarrow{\nabla})} = -\frac{1}{l}\frac{\sqrt{\bar{E}}}{\sqrt{\bar{\rho}}}\left(\overline{\rho\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'} - \frac{2}{3}\bar{E}\mathbb{E}\right)$$

mit

$$\bar{E} \underset{\text{Def.}}{=} \overline{\frac{1}{2}\rho\mathfrak{v}'\cdot\mathfrak{v}'}$$

auf die Atmosphäre anwenden. Multiplizieren von (19) mit $\frac{1}{2}\mathbb{E}$: (Spurbildung) liefert $\overline{p'\nabla\cdot\mathfrak{v}'} = o$, was wegen (18) erfüllt ist [x]. Dabei haben wir anstelle der von Rotta verwendeten Reynoldsspannungen $\overline{\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}$ den Tensor $\overline{\rho\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'}$ in den Ansatz eingesetzt. l ist eine die mittlere Größe der Turbulenzelemente kennzeichnende Länge, die wir als konstanten Parameter beibehalten wollen (vergl. Abschnitt 1). Die Modellvorstellungen, die zu dem Ansatz (19) führten, können hier nicht dargestellt werden (vergl. Rotta [9]), jedoch wird der Ansatz nicht so sehr durch seine Ableitung begründet - es gibt keinen formalen Weg, ihn herzuleiten - als dadurch, daß er in die Gleichung eingesetzt und auf bestimmte Probleme angewendet, vernünftige Resultate liefert.

[x]) Der Deformationstensor $\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'\overleftarrow{\nabla})$ beschreibt wegen Spur$(\frac{1}{2}(\nabla\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'\overleftarrow{\nabla})) = \nabla\cdot\mathfrak{v}' = o$ nur volumentreue Strömungen.

Davydov [1o] gibt auf der rechten Seite von (19) zusätzliche Terme an, die verhindern sollen, daß die Geschwindigkeitsschwankungen im zeitlichen Verlauf am Rande isotrop werden; sie werden hier nicht berücksichtigt.

Die turbulenten Schwankungen der potentiellen Temperatur vernachlässigen wir vollständig, d. h. wir streichen den zweiten Term von (16c) und damit die ganze Gleichung (16g). Ebenso vernachlässigen wir hier den Diffusionsterm in (16f). Wir untersuchen also nur den Einfluß der Reynoldsspannungen zusammen mit dem Ansatz (19) auf das Gleichungssystem (1) bei der Anwendung auf die Atmosphäre, und wir werden zeigen, daß (16) mit (19) im Gegensatz zu (1) den meteorologischen Lärm unterdrückt.

Mit den gemachten Annahmen erhalten wir aus (16) das geschlossene Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
&D\hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\bar{\mathbb{T}} + 2\Omega\times\hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\bar{p} + \nabla\varphi = o\\
&D\bar{\rho} + \bar{\rho}\nabla\cdot\hat{\mathbf{w}} = o\\
&D\hat{\Theta} = o\\
&\hat{\Theta} = \left(\frac{p_s}{\bar{p}}\right)^{\varkappa}\hat{T}\\
&\bar{p} = \bar{\rho}R\hat{T}
\end{aligned}
\qquad (2o)
$$

$$
D\bar{\mathbb{T}} + \bar{\mathbb{T}}\nabla\hat{\mathbf{w}} + \bar{\mathbb{T}}\cdot\nabla\hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{w}}\overleftarrow{\nabla}\cdot\bar{\mathbb{T}} + 2\Omega\times\bar{\mathbb{T}} - \bar{\mathbb{T}}\times 2\Omega + \frac{1}{\bar{\rho}}\sqrt{\bar{E}}\,l\,(\bar{\mathbb{T}} - \frac{2}{3}\bar{E}\mathbb{E}) = o \qquad x)
$$

mit

$$
\bar{\mathbb{T}} = \underset{\text{Def.}}{\overline{\rho\mathbf{v}'\mathbf{v}'}}\ , \qquad \bar{E} = \underset{\text{Def.}}{\frac{1}{2}\,\mathbb{E}:\bar{\mathbb{T}}} = \frac{1}{2}\ \text{Spur}\ (\bar{\mathbb{T}})\ ,
$$

und die Gleichung für die Turbulenzenergie lautet:

$$
D\bar{E} + \bar{E}\nabla\cdot\hat{\mathbf{w}} + \bar{\mathbb{T}}:\nabla\hat{\mathbf{w}} = o\ . \qquad xx)
$$

6 Störungstheorie

Zur Untersuchung des Verhaltens gegenüber dem meteorologischen Lärm wenden wir auf (2o) die Störungstheorie an, und betrachten nur kleine Störungen von der Ausgangslage. Sei

$$
\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}^o + \mathbf{w}^1 + \cdots\ ,\quad \bar{p} = p_o + p_1 + \cdots,\quad \bar{\rho} = \rho_o + \rho_1 + \cdots,\quad \hat{\Theta} = \Theta_o + \Theta_1 + \cdots,
$$
$$
\hat{T} = T_o + T_1 + \cdots,\quad \bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T}^o + \mathbb{T}^1 + \cdots
$$

und

$$
D_o \underset{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}^o\cdot\nabla\ ,\qquad D_1 \underset{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}^1\cdot\nabla\ ,
$$

---

x) $\overleftarrow{\nabla}$ bedeutet, daß der Operator nach links anzuwenden ist.

xx) $\mathbf{E}:\mathbf{E} = 3$, $\mathbf{E}:(\mathbf{c}\times\mathbf{A}) = o$ mit $\mathbf{c}$ beliebig, wenn der Tensor $\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

so lautet das System der nullten Näherung:

$$D_o \mathbf{v}^o + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot \mathbf{T}^o + 2\Omega \times \mathbf{v}^o + \frac{1}{\rho_o} \nabla p_o + \nabla \varphi = o$$

$$D_o \rho_o + \rho_o \nabla \cdot \mathbf{v}^o = o$$

(21)
$$D_o \Theta_o = o$$

$$\Theta_o = \left(\frac{p_s}{p_o}\right)^{\varkappa} T_o$$

$$p_o = \rho_o R T_o$$

$$D_o \mathbf{T}^o + \mathbf{T}^o \nabla \cdot \mathbf{v}^o + \mathbb{T}^o \cdot \nabla \mathbf{v}^o + \mathbf{v}^o \nabla \cdot \mathbf{T}^o + 2\Omega \times \mathbb{T}^o - \mathbb{T}^o \times 2\Omega + \frac{1}{1} \sqrt{\frac{E^o}{\rho_o}} (\mathbf{T}^o - \frac{2}{3} E^o \mathbf{E}) =$$

$$= o$$

mit $$E^o = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{T}^o \quad .$$

Die Turbulenzenergiegleichung erhält man daraus zu

$$D_o E^o + E^o \nabla \cdot \mathbf{v}^o + \mathbb{T}^o : (\nabla \mathbf{v}^o) = o \quad .$$

Das Gleichungssystem der 1. Näherung lautet:

$$D_o \mathbf{v}^1 + D_1 \mathbf{v}^o + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot \mathbf{T}^1 - \frac{\rho_1}{\rho_o^2} \nabla \cdot \mathbf{T}^o + 2\Omega \times \mathbf{v}^1 + \frac{1}{\rho_o} \nabla p_1 - \frac{\rho_1}{\rho_o^2} \nabla p_o = o$$

$$D_o \rho_1 + D_1 \rho_o + \rho_o \nabla \cdot \mathbf{v}^1 + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{v}^o = o$$

$$D_o \Theta_1 + D_1 \Theta_o = o$$

(22)
$$\Theta_1 = \left(\frac{p_s}{p_o}\right)^{\varkappa} T_1 - \left(\frac{p_s}{p_o}\right)^{\varkappa} T_o \varkappa \frac{p_1}{p_o}$$

$$p_1 = \rho_o R T_1 + \rho_1 R T_o$$

$$D_o \mathbb{T}^1 + D_1 \mathbf{T}^o + \mathbb{T}^1 \nabla \cdot \mathbf{v}^o + \mathbb{T}^o \nabla \cdot \mathbf{v}^1 + \mathbb{T}^o \cdot \nabla \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^1 \nabla \cdot \mathbf{T}^o + \mathbf{T}^1 \cdot \nabla \mathbf{v}^o + \mathbf{v}^o \nabla \cdot \mathbf{T}^1 +$$

$$+ 2\Omega \times \mathbf{T}^1 - \mathbf{T}^1 \times 2\Omega + \frac{1}{1} \sqrt{\frac{E^o}{\rho_o}} (\mathbb{T}^1 - \frac{2}{3} E^1 \mathbf{E}) + \frac{1}{21} \frac{E^1}{\sqrt{E^o \rho_o}} (\mathbf{T}^o - \frac{2}{3} E^o \mathbf{E}) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_o} \frac{1}{1} \sqrt{\frac{E^o}{\rho_o}} (\mathbf{T}^o - \frac{2}{3} E^o \mathbf{E}) = o$$

mit $$E^1 = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{T}^1 \quad .$$

Multipliziert man die letzte Gleichung (22) mit $\frac{1}{2} \mathbf{E}:$, so erhält man

die zugehörige Energiegleichung:

$$D_o E^1 + D_1 E^o + E^1 \nabla \cdot \mathbf{v}^o + E^o \nabla \cdot \mathbf{v}^1 + \mathbb{T}^1 : \nabla \mathbf{v}^o + \mathbb{T}^o : \nabla \mathbf{v}^1 = o \quad .$$

7 Das Gleichungssystem der 1. Näherung im Falle einer isothermen o. Näherung ohne Wind

Wir suchen zunächst als o. Näherung eine stationäre Lösung von (21) mit $\mathbf{v}^o = o$. Sei $T_o = \text{const}$ (isotherme Atmosphäre), $\mathbb{T}^o = e\rho_o \mathbb{E}$ mit $e \geq o$ und $e = \text{const}$. Es folgt $E^o = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{T}^o = \frac{3}{2} e\rho_o$. Druck und Dichte seien nur von z abhängig: $p_o = p_o(z)$, $\rho_o = \rho_o(z)$. Auf eine o. Näherung angewendet ist dann $D_o \equiv o$. Damit verschwinden alle Glieder der Horizontalkomponente der Bewegungsgleichung (21) einzeln. Die Vertikalkomponente lautet

$$\frac{e}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial z} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p_o}{\partial z} + g = o \quad \text{oder} \quad \frac{e}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial z} + RT_o \frac{1}{p_o} \frac{\partial p_o}{\partial z} + g = o \; .$$

Wegen $\frac{1}{p_o} \frac{\partial p_o}{\partial z} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial z}$ (aus der Gasgleichung, da T_o konstant war) löst der Ansatz

$$\frac{1}{p_o} \frac{\partial p_o}{\partial z} = - \frac{g}{RT_o + e} \quad , \quad p_o = p_s e^{-\frac{gz}{RT_o + e}}$$

die Gleichung. Kontinuitätsgleichung und Adiabatengleichung (21) sind erfüllt.

Für die potentielle Temperatur gilt

$$\frac{1}{\Theta_o} \frac{\partial \Theta_o}{\partial z} = - \frac{\varkappa}{p_o} \frac{\partial p_o}{\partial z} = \frac{g\varkappa}{RT_o + e} \; ;$$

die statische Stabilität der Schichtung ist damit nicht so groß wie im Falle der o. Näherung der hydrodynamischen Grundgleichungen (vergl. Abschnitt 2), denn dort war

$$\frac{1}{\Theta_o} \frac{\partial \Theta_o}{\partial z} = \frac{g\varkappa}{RT_o} \; .$$

In der sechsten Gleichung (21) verschwinden wieder alle Terme einzeln bis auf die beiden Coriolisterme, die sich wegen

$$\mathbf{a} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathbf{a} = o \quad , \quad \mathbf{a} \text{ beliebig}$$

zu Null ergänzen. Ferner gilt $E^o = \frac{3}{2} e\rho_o$. e ist also ein Maß für die Gesamtschwankungsenergie der o. Näherung. Setzt man die o. Näherung in das Gleichungssystem der 1. Näherung (22) ein, so kommt:

(Angewendet auf Gleichungen der 1. Näherung gilt $D_1 = w^1 \frac{\partial}{\partial z}$, $D_o = \frac{\partial}{\partial t}$)

$$\frac{\partial \mathbf{v}^1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot \mathbf{T}^1 + 2\Omega \times \mathbf{v}^1 + \frac{1}{\rho_o} \nabla p_1 - (1 + \frac{e}{RT_o}) \frac{\rho_1}{\rho_o} \nabla p_o = o \qquad x)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w^1 \frac{\partial}{\partial z} \rho_o + \rho_o \nabla \cdot \mathbf{v}^1 = o$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial t} + w^1 \frac{\partial}{\partial z} \Theta_o = o \qquad (23)$$

$$\Theta_1 = T_1 (\frac{p_s}{p_o})^{\varkappa} - T_o (\frac{p_s}{p_o})^{\varkappa} \frac{p_1}{p_o}$$

$$p_1 = \rho_o R T_1 + \rho_1 R T_o$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}^1}{\partial t} + e\mathbf{E} w^1 \frac{\partial}{\partial z} \rho_o + e\rho_o \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{v}^1 + e\rho_o (\nabla \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^1 \overleftarrow{\nabla}) + 2\Omega \times \mathbf{T}^1 - \mathbf{T}^1 \times 2\Omega +$$
$$+ \frac{1}{1}\sqrt{\frac{3}{2}} e (\mathbf{T}^1 - \frac{2}{3} E^1 \mathbf{E}) = o ,$$

und die Energiegleichung lautet:

$$\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{3}{2} e w^1 \frac{\partial}{\partial z} \rho_o + \frac{5}{2} e\rho_o \nabla \cdot \mathbf{v}^1 = o .$$

Zur Vereinfachung der Rechnung führen wir neue, zum Teil dimensionslose Variable ein. Sei

$$p \underset{\text{Def.}}{=} \frac{p_1}{p_o} , \quad \rho \underset{\text{Def.}}{=} \frac{\rho_1}{\rho_o} , \quad T \underset{\text{Def.}}{=} \frac{T_1}{T_o} , \quad \Theta \underset{\text{Def.}}{=} \frac{\Theta_1}{\Theta_o} , \quad \mathbf{T} \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\rho_o} \mathbf{T}^1 ,$$

$$\mathbf{v} \underset{\text{Def.}}{=} \mathbf{v}^1 , \quad E \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\rho_o} E^1 . \qquad xx)$$

Der zweite Term der Bewegungsgleichung (23) hat dann die Form: ($\mathbf{k}$ = vertikaler Einheitsvektor)

$$\frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot \mathbf{T}^1 = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{T} \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{T} \frac{g}{RT_o + e}$$

und der vierte

$$\frac{1}{\rho_o} \nabla p_1 = \nabla p + \mathbf{k} RT_o p \frac{1}{\rho_o} \nabla \rho_o = \nabla p - \frac{gRT_o}{RT_o + e} \mathbf{k} p ,$$

---

x) $\nabla \cdot \mathbf{T}^o = \frac{e}{RT_o} \nabla p_o$

xx) Diese Variablen sind nicht mit denen von Gleichung (1) identisch.

während der letzte einfach

$$\mathbf{k}\, g\rho$$

lautet. In der Kontinuitätsgleichung wird aus dem zweiten Term:

$$\frac{1}{\rho_o}\, w^1\, \frac{\partial \rho_o}{\partial z} = -\frac{g}{RT_o + e}\, w \quad , \qquad (w = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$$

und in der Adiabatengleichung lautet der zweite Term

$$\frac{1}{\Theta_o}\, w^1\, \frac{\partial}{\partial z}\, \Theta_o = w\, \frac{\mathbf{k}\, g}{RT_o + e} \quad .$$

In der sechsten Gleichung (23) wird aus dem zweiten Term:

$$\frac{1}{\rho_o}\, e\mathbf{E}\, w^1\, \frac{\partial}{\partial z}\, \rho_o = -\frac{eg}{RT_o + e}\, w\mathbf{E} \quad ,$$

und in der Energiegleichung lautet der zweite Term:

$$\frac{1}{\rho_o}\, \frac{3}{2}\, ew^1\, \frac{\partial}{\partial z}\, \rho_o = -\frac{3}{2}\, \frac{eg}{RT_o + e}\, w \quad .$$

Mit den Abkürzungen

$$(24) \quad a = \underset{\text{Def.}}{\frac{g}{RT_o + e}} \quad , \quad b = RT_o, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{1}\sqrt{\frac{3}{2}\, e} \quad , \quad \mathbf{D} = \underset{\text{Def.}}{\nabla - a\mathbf{k}}$$

erhält man also aus (23) ein lineares homogenes Gleichungssystem mit nur konstanten Koeffizienten:

$$(25) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{T} + 2\Omega \times \mathbf{v} + b\mathbf{D}p + \mathbf{k}\, g\rho = o \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} - aw + \nabla\cdot\mathbf{v} = o \\ &\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \cdot a\mathbf{k}w = o \\ &\Theta = T - \mathbf{k}p \\ &p = T + \rho \\ &\frac{\partial \mathbb{T}}{\partial t} - eaw\mathbb{E} + e\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{v} + e(\nabla\mathbf{v} + w\overleftarrow{\nabla}) + 2\Omega \times \mathbb{T} - \mathbb{T} \times 2\Omega + d(\mathbf{T} - \frac{2}{3}\, \mathbf{E}\mathbf{E}) = o. \end{aligned}$$

Die Energiegleichung lautet

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{3}{2}\, eaw + \frac{5}{2}\, e\nabla\cdot\mathbf{v} = o \quad , \quad E = \frac{1}{2}\, \mathbb{E} : \mathbb{T} \quad .$$

Alle Variablen erfüllen also dieselbe Differentialgleichung.

Da in bezug auf den meteorologischen Lärm die Corioliskraft nur von untergeordneter Bedeutung ist - vergleiche die Rechnungen des Abschnitts 2 mit dem Gleichungssystem (1) - soll sie hier, im Falle

einer o. Näherung ohne Wind, der Einfachheit halber vernachlässigt werden. Wir setzen also in (25) $\Omega \equiv o$.

8 Ableitung der Dispersionsgleichung

Wir eliminieren nacheinander die einzelnen Variablen in dem Gleichungssystem (25) mit $\Omega = o$. Aus der Adiabatengleichung (25) wird wegen $\Theta = (1-\varkappa)\, p - \rho$

$$(1 - \varkappa)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} + a\varkappa w = o \ ,$$

oder durch Einsetzen der Kontinuitätsgleichung (25): $(1 - \varkappa = \frac{1}{\gamma})$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = aw - \gamma \nabla\cdot\mathbf{v} \ .$$

Damit kann p und ρ aus der Bewegungsgleichung (25) eliminiert werden:

$$(26)\quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{D}\cdot\mathbf{T} - (c^2\mathbb{D} + g\varkappa)\,\nabla\cdot\mathbf{v} + a(b\mathbb{D} + g\varkappa)\,w = o$$

mit $c^2 = b\gamma = RT_o\gamma$ = Quadrat der Schallgeschwindigkeit.

Wir setzen E aus der Energiegleichung in die T-Gleichung ein und erhalten mit $A = \frac{\partial}{\partial t} + d$:

$$\frac{\partial}{\partial t} A\mathbf{T} - ea\mathbb{E}Aw + e\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{5}{3}d\right)\nabla\cdot\mathbf{v} + e\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\overleftarrow{\nabla}) = o$$

oder nach Multiplikation mit $\mathbb{D}\cdot$ wegen $\mathbb{D}\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} - aw$:

$$\frac{\partial}{\partial t} A\mathbb{D}\cdot\mathbf{T} = ea\,(A\mathbb{D} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla)w - e\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{D}\cdot\nabla\mathbf{v} - e\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{5}{3}d\right)\mathbb{D} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\right]\nabla\cdot\mathbf{v} \ .$$

Durch Anwenden von A auf (26) kann jetzt $\mathbf{T}$ eliminiert werden:

$$(27)\qquad B_1\mathbf{v} - \mathbb{B}_2\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbb{B}_3 w = o$$

mit

$$B_1 = A\frac{\partial^2}{\partial t^2} - e\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{D}\cdot\nabla = \frac{\partial^3}{\partial t^3} + d\frac{\partial^2}{\partial t^2} - e\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 + ea\frac{\partial^2}{\partial t \partial z}$$

$$\mathbb{B}_2 = (c^2 + e)\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{D} + (c^2 d + \frac{5}{3}ed)\,\mathbb{D} + g\varkappa\,(\frac{\partial}{\partial t} + d) + e\frac{\partial}{\partial t}\nabla$$

$$\mathbb{B}_2 = d_1\frac{\partial}{\partial t}\nabla - d_2\varkappa\frac{\partial}{\partial t} + d_3\nabla - d_4\varkappa$$

$$d_1 = c^2 + 2e, \quad d_2 = ac^2\varkappa \qquad x)$$

---

x) wegen $ae - g = -ab$ und $\gamma - 1 = \varkappa\gamma$

$$d_3 = d\,(c^2 + \frac{5}{3}e)\ ,\quad d_4 = ad(c^2\varkappa + \frac{2}{3}e)$$

$$B_3 = gA\tilde{D} + ag\varkappa A + ea\,\frac{\partial}{\partial t}\nabla = \left[(g + ea)\,\frac{\partial}{\partial t} + gd\right]\nabla\ .$$

Um eine Gleichung für w allein zu finden, multiplizieren wir (27) mit $\nabla\cdot$ bzw. $\varkappa\cdot$ und erhalten:

$$(B_1 - \nabla\cdot B_2)\,\nabla\cdot v + \nabla\cdot B_3 w = o$$

bzw.

$$-\varkappa\cdot B_2\,\nabla\cdot v + (B_1 + \varkappa\cdot B_3)\,w = o\ .$$

Elimination von $\nabla\cdot v$ liefert:

$$Bw = o$$

mit

$$B = \varkappa\cdot B_2\nabla\cdot B_3 + (B_1 - \nabla\cdot B_2)(B_1 + \varkappa\cdot B_3)$$

oder explizit:

$$\begin{aligned} B = {} & \left[d_1\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} - d_2\frac{\partial}{\partial t} + d_3\frac{\partial}{\partial z} - d_4\right]\left[(g + ea)\frac{\partial}{\partial t} + gd\right]\nabla^2 + \\ & + \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} + d\frac{\partial^2}{\partial t^2} - e\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 + ea\,\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} - d_1\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 + d_2\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} - \right. \\ & \left. - d_3\nabla^2 + d_4\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} + d\frac{\partial^2}{\partial t^2} - e\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 + ea\,\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} + \right. \\ & \left. + (g + ea)\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} + gd\,\frac{\partial}{\partial z}\right]\ . \end{aligned}$$

Sortieren nach Potenzen von $\frac{\partial}{\partial t}$ ergibt:

$$\begin{aligned} B = {} & \frac{\partial^6}{\partial t^6} + 2d\,\frac{\partial^5}{\partial t^5} + \frac{\partial^4}{\partial t^4}\left[-(c^2 + 4e)\nabla^2 + a(c^2 + 4e)\frac{\partial}{\partial z} + d^2\right] + \\ & + \frac{\partial^3}{\partial t^3}\left[-d(2c^2 + \frac{17}{3}e)\nabla^2 + da(2c^2 + \frac{17}{3}e)\,\frac{\partial}{\partial z}\right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[e(c^2 + 3e)\nabla^4 - 2ae(c^2 + 3e)\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 - (d^2(c^2 + \frac{5}{3}e) + \right. \\ & \left. + (g + ea)ac^2\varkappa)\nabla^2 + (ea^2(c^2 + 3e) + (g + ea)ac^2\varkappa)\,\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \right. \\ & \left. + ad^2(c^2 + \frac{5}{3}e)\,\frac{\partial}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[ed(c^2 + \frac{5}{3}e)\nabla^4 - 2ead(c^2 + \frac{5}{3}e)\nabla^2\frac{\partial}{\partial z} - \right. \\ & \left. - ad\left[gc^2\varkappa + (g+ea)(c^2\varkappa + \frac{2}{3}e)\right]\nabla_h^2 + ea^2d(c^2 + \frac{5}{3}e)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] - \nabla_h^2 agd^2(c^2\varkappa + \\ & + \frac{2}{3}e)\ . \end{aligned} \tag{28}$$

Wir machen jetzt wieder den Ansatz (5) mit (5a) für die kleinen Störungen und ersetzen in (28)

$\frac{\partial}{\partial t}$ durch R, ∇^2 durch $-K^2$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ durch ik (vergl. Abschnitt 2),

und wir erhalten

$$(29)\quad R^6 + \bar{a}_1 R^5 + \bar{a}_2 R^4 + \bar{a}_3 R^3 + \bar{a}_4 R^2 + \bar{a}_5 R + \bar{a}_6 = o$$

mit $(\alpha = k^2 c^2, \quad \eta = \frac{e}{c^2})$ Def.

$$\bar{a}_1 = 2d$$

$$\bar{a}_2 = \alpha(1 + 4\eta) + iakc^2(1 + 4\eta) + d^2$$

$$\bar{a}_3 = 2\alpha d(1 + \tfrac{17}{6}\eta) + i2adc^2 k(1 + \tfrac{17}{6}\eta)$$

$$(3o)\quad \bar{a}_4 = \alpha^2\eta(1 + 3\eta) + i2ae k\alpha(1 + 3\eta) + (d^2(1 + \tfrac{5}{3}\eta) + (g + ea)a\varkappa)\, c^2K^2 - c^2k^2(ea^2(1 + 3\eta) + (g + ea)a\varkappa) + iad^2c^2k(1 + \tfrac{5}{3}\eta)$$

$$\bar{a}_5 = \alpha^2 d\eta(1 + \tfrac{5}{3}\eta) + i2ead\alpha k(1 + \tfrac{5}{3}\eta) + ad\alpha c^2(g\varkappa + (g + ea)(\varkappa + \tfrac{2}{3}\eta)) - ea^2 d\alpha(1 + \tfrac{5}{3}\eta)$$

$$\bar{a}_6 = agd^2c^2k^2(\varkappa + \tfrac{2}{3}\eta) \quad ,$$

wobei bereits die Approximation $K^2 \approx k^2$ (vergl. (5a)) eingeführt wurde.

Bei der größenordnungsmäßigen Abschätzung der einzelnen Glieder für den Lärmbereich mit den Zahlenwerten des Abschnitts 2 ergibt sich jedoch nicht für alle Terme die gleiche Größenordnung, so daß (3o) für den meteorologischen Lärm vereinfacht werden kann. Zur Abschätzung machen wir außerdem die sicherlich gerechtfertigte Annahme

$$\eta = \frac{e}{c^2} \ll 1 \quad ,$$

d. h. die Schwankungsgeschwindigkeit soll klein gegen die Schallgeschwindigkeit sein.

Wegen (vergl. (2ϕ))

$$\left[\frac{a}{k}\right] \sim \left[\frac{g}{c^2 k_z^o}\right] = 3 \cdot 1o^{-2}$$

darf in $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ und $\bar{a}_5$ jeweils der zweite gegen den ersten Term vernachlässigt werden und in $\bar{a}_4$ auch der fünfte gegen den dritten Term. In $\bar{a}_2$ darf ferner der dritte Term vernachlässigt werden:

$$\left[\frac{d^2}{c^2k^2}\right] \leq \left[\frac{d^2}{c^2k_z^2}\right] \ll 1 \quad ,$$

falls

$$[d^2] \ll 1 \sec^{-2}$$

gewählt wird. Diese Voraussetzung wollen wir zunächst als gegeben annehmen. Es ist

$$\left[\frac{ea^2c^2k^2}{ec^2k^4}\right] = \left[\frac{a^2}{k^2}\right] \leq 1o^{-3}$$

und

$$\left[\frac{ea}{g}\right] = \eta \ll 1,$$

und

$$\left[\frac{gac^2\varepsilon^2k^2}{ec^2k^4}\right] = \left[\frac{g^2\varepsilon^2}{ec^2k^2}\right] \leq \left[\frac{1}{e}\right] \cdot 1o^{-4}\ m^2\sec^{-2} \ll 1 \ ,$$

falls

$$[e] > 1o^{-2}\ m^2\sec^{-2} \qquad x)$$

ist, daher bleibt vom dritten und vierten Term in $\bar{a}_4$ nur $d^2\alpha(1+\frac{5}{3}\eta)$.

In $\bar{a}_5$ kann wegen

$$\left[\frac{ea^2dc^2k^2}{edc^2k^4}\right] = \left[\frac{a^2}{k^2}\right] \leq 1o^{-3}$$

der vierte gegen den ersten Term vernachlässigt werden und wegen

$$\left[\frac{adgc^2\varepsilon^2k^2}{edc^2k^4}\right] \leq \left[\frac{g^2\varepsilon^2}{ec^2k_z^2}\right] = \left[\frac{1}{e}\right] \cdot 1o^{-4}\ m^2\sec^{-2} \ll 1$$

mit

$$[e] > 1o^{-2}\ m^2\sec^{-2} \qquad x)$$

und

$$\left[\frac{ea}{g}\right] = \eta < 1$$

vernachlässigen wir auch den dritten gegen den ersten Term.

Damit erhalten wir aus (29) und (3o) die Gleichung 6. Grades angenähert zu

(31) $R^6 + a_1R^5 + a_2R^4 + a_3R^3 + a_4R^2 + a_5R + a_6 = o$

mit

---

x) Ist diese Bedingung nicht erfüllt, kann der entsprechende Term auch in die Gleichungen mit einbezogen werden. Der Einfachheit halber verzichten wir hier darauf.

$$a_1 = 2d \qquad \text{mit } \alpha = \underset{\text{Def.}}{c^2 k^2}$$

$$a_2 = \alpha(1 + 4\eta)$$

$$a_3 = \alpha 2d(1 + \frac{17}{6}\eta)$$

$$a_4 = \alpha^2\eta(1 + 3\eta) + \alpha d^2(1 + \frac{5}{3}\eta)$$

$$a_5 = \alpha^2 d\eta(1 + \frac{5}{3}\eta)$$

$$a_6 = d^2 \quad g^2 K_k^1 \frac{\varkappa + \frac{2}{3}\eta}{\frac{1}{\gamma} + \eta}$$

sie hat nur reelle Koeffizienten.

9 Die Stabilität im Lärmbereich

Nach dem Kriterium von Hurwitz (vergl. etwa Willers [14]) haben alle Nullstellen von (31) negativen Realteil, wenn außer den Koeffizienten a_i die sechs Determinanten

$$a_1 \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & o \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & o & o \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ o & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & o & o & o \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & o \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ o & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ o & o & o & a_6 & a_5 \end{vmatrix}, \quad D_6 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & o & o & o & o \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & o & o \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ o & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ o & o & o & a_6 & a_5 & a_4 \\ o & o & o & o & o & a_6 \end{vmatrix}$$

sämtlich positiv ausfallen [x]). Ausrechnen und Einsetzen der a_i ergibt bis auf höhere Glieder in η : (vergl. Anhang A)

$$a_1 = 2d > o$$

$$D_2 = \alpha d\eta \frac{7}{3} > o$$

$$D_3 \approx 4\alpha d^2(\frac{2}{3}\alpha\eta - d^2) > o, \qquad \text{falls } k^2 l^2 > \frac{9}{4}$$

[x]) Das Kriterium ist notwendig und hinreichend.

$$D_4 \simeq 2\alpha^2 d^2 \left(\frac{2}{3}\alpha^2\eta^2 + \frac{1}{3}\alpha d^2\eta - 2d^4\right) + a_1 a_6 D_2 > o, \quad \text{falls } k^2 l^2 > \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$D_5 \simeq 2\alpha^4 d^3\eta \left(\frac{2}{3}\alpha^2\eta^2 + \frac{1}{3}\alpha d^2\eta - 2d^4\right) - \frac{16}{3}\alpha^3 d^3\eta a_6 + 8\alpha^2 d^5 a_6 - 8d^3 a_6^2 > o,$$

$$\text{falls } k^2 l^2 > 2$$

$$D_6 = a_6 D_5 \ .$$

Über die Herleitung dieser Gleichungen, sowie über die Abschätzung von D_5 vergleiche die Anhänge A und B.

Wählt man also die Maschlänge l derart, daß

$$3 < k_z^{o\,2} l^2 < k^2 l^2$$

oder

$$l > \frac{\sqrt{3}}{2\pi} L_z \simeq o.3 \quad L_z \simeq 6oo\ m$$

ist, so verhält sich das System (25) im Lärmbereich stabil.*) (L_z war die meteorologische Maschenweite in z-Richtung oder die größte Lärmwellenlänge.) Wird also die obige Bedingung verletzt, so gibt es auch Lösungen von (29) mit positivem Realteil, was eine Verstärkung von kleinen Störungen bedeutet. Man kann daraus jedoch nicht ableiten, daß im meteorologischen Bereich instabile Lösungen existieren, da dort (31) wegen der Vernachlässigungen nicht gilt. Wir werden dies aber in Abschnitt 1o zeigen.

l ist also ein Parameter, mit dem man die Grenze für die Stabilität der Gleichung - bzw. die Grenze für die zu dämpfenden Wellenlängen - beliebig (aber im Rahmen der Vernachlässigungen) festlegen kann. Darüber hinaus wird sich in Abschnitt 11 zeigen, daß die Turbulenzenergie e, die hier als Parameter betrachtet wird, die Stärke der Dämpfung (also die Halbwertszeit) festlegt. Damit ist gezeigt, daß die Einführung des Ansatzes (19) in die hydro-thermodynamischen Gleichungen eine Verbesserung bezüglich des Lärmproblems bedeutet. Insbesondere können (vergl. Abschnitt 11) die Wellen mit den hohen Ausbreitungsgeschwindigkeiten befriedigend gedämpft werden.

Setzt man in der o. Näherung der Störungstheorie die Turbulenzenergie Null:

$$E^o = \frac{3}{2} e\rho_o = o \ ,$$

so erhält man mit e = o, d = o aus (28) mit dem Ansatz (5) eine biquadratische Gleichung für R:

$$R^4 + R^2(c^2K^2 + ig\gamma k) + g^2\gamma\varkappa K_h^2 = o \ ,$$

welche mit der Frequenzgleichung des Abschnitts 2 identisch ist, wenn man dort den Coriolisparameter f = o setzt. Die Lärmunterdrückung hängt also wesentlich von der Turbulenzenergie ab.

*) Es folgt $d^2 \ll 1\ sec^2$ (vergl. S. 25)

Betrachtet man die Turbulenzenergie der o. Näherung E^o als Parameter, so kann man sagen: In einer Umgebung von $E^o = o$ sind die Dispersionsgleichungen der Systeme mit und ohne inhomogene Turbulenz identisch, während sich in einer Umgebung von $E^o > o$ eine mit e wachsende Dämpfung ergibt (vergl. Abschnitt 11).

1o Die Stabilität im meteorologischen Bereich

Der meteorologische Bereich ist durch die meteorologischen Maschenweiten L_z, L_h begrenzt

$$3\cdot 1o^{-3} m^{-1} = \left[\frac{2\pi}{L_z}\right] = \left[k_z^o\right] > [k] > 1o^{-4} m^{-1}$$

$$3\cdot 1o^{-6} m^{-1} = \left[\frac{2\pi}{L_h}\right] = \left[K_h^o\right] > \left[K_h\right] > 1o^{-7} m^{-1}\ , \qquad x)$$

so daß die Vernachlässigungen des Abschnitts 9 nicht mehr gerechtfertigt sind und die vollen Gleichungen (29), (3o) für die Lage der Nullstellen berücksichtigt werden müssen. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß die Wurzeln von (29) nicht alle links von der imaginären Achse liegen. Dazu genügt es, das gleiche für das Polynom ($\bar{\xi} \underset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{R}$)

$$(32)\quad \bar{a}_6\bar{\xi}^6 + \bar{a}_5\bar{\xi}^5 + \bar{a}_4\bar{\xi}^4 + \bar{a}_3\bar{\xi}^3 + \bar{a}_2\bar{\xi}^2 + \bar{a}_1\bar{\xi} + 1 = o$$

mit $\qquad \bar{a}_i = a_i' + ia_i''\qquad (i = 1,2,\cdots 6)$

und

$$a_1' = 2d$$

$$a_2' = \alpha(1 + 4\eta) + d^2$$

$$a_3' = 2\alpha d(1 + \tfrac{17}{6}\eta)$$

$$a_4' = \alpha^2\eta(1 + 3\eta) + \alpha d^2(1 + \tfrac{5}{3}\eta) - \alpha e a^2(1 + 3\eta) + (g + ea)a\varkappa\varepsilon^2\alpha$$

$$a_5' = \alpha^2 d\eta(1 + \tfrac{5}{3}\eta) - ea^2 d\alpha(1 + \tfrac{5}{3}\eta) + ad\alpha\varepsilon^2(g\varkappa + (g + ea)(\varkappa + \tfrac{2}{3}\eta))$$

$$a_6' = agd^2\varkappa^2\varepsilon^2(\varkappa + \tfrac{2}{3}\eta)$$

$$a_1'' = o$$

$$a_2'' = akc^2(1 + 4\eta)$$

$$a_3'' = 2akdc^2(1 + \tfrac{17}{6}\eta)$$

x) Die Zahlen geben nur größenordnungsmäßige Werte an.

$$a_4'' = 2ake\alpha(1 + 3\eta) + akd^2c^2(1 + \frac{5}{3}\eta)$$

$$a_5'' = 2aked\alpha(1 + \frac{5}{3}\eta)$$

$$a_6'' = o$$

zu zeigen. Das dem Hurwitzschen Kriterium entsprechende Kriterium von Bilharz (vergl. Bilharz [15]) für den Fall komplexer Koeffizienten $\bar{a}_i$ lautet: Alle Nullstellen des Polynoms (32) (vom Grade n) liegen dann und nur dann links von der imaginären Achse, wenn alle n Hauptunterdeterminanten gerader Ordnung von M positiv sind, wo M die 2n-zeilige quadratische Matrix

$$M = \begin{vmatrix} 1 & o & o & o & o & o & \cdots \\ a_1'' & a_1' & 1 & o & o & o & \cdots \\ -a_2' & a_2'' & a_1'' & a_1' & 1 & o & \cdots \\ -a_3'' & -a_3' & -a_2' & a_2'' & a_1'' & a_1' & \cdots \\ a_4' & -a_4'' & -a_3'' & -a_3' & -a_2' & a_2'' & \cdots \\ a_5'' & a_5' & a_4' & -a_4'' & -a_3'' & -a_3' & \cdots \\ -a_6' & a_6'' & a_5'' & a_5' & a_4' & -a_4'' & \cdots \\ -a_7'' & -a_7' & -a_6' & a_6'' & a_5'' & a_5' & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

bedeutet. Die erste Determinante ist positiv:

$$\begin{vmatrix} 1 & o \\ a_1'' & a_1' \end{vmatrix} = a_1' = 2d > o \quad ,$$

die zweite lautet:

$$\bar{D}_2 \underset{\text{Def.}}{=} \begin{vmatrix} 1 & o & o & o \\ a_1'' & a_1' & 1 & o \\ -a_2' & a_2'' & a_1'' & a_1' \\ -a_3'' & -a_3' & -a_2' & a_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & 1 & o \\ a_2'' & o & a_1' \\ -a_3' & -a_2' & a_2'' \end{vmatrix} = a_1'^2 a_2' - (a_2''^2 + a_1' a_3')$$

oder eingesetzt

$$\bar{D}_2 = 7\,\frac{e}{l^2}\,\alpha\eta + 9\,\frac{e^2}{l^4} - \frac{g^2\alpha}{c^2}\,\left(\frac{1+4\eta}{\frac{1}{\delta}+\eta}\right)^2 \quad .$$

Nun haben wir uns in dieser Arbeit auf folgende Grenzen für die Größenordnung von e und l festgelegt (vergl. die Abschnitte 1 (für l) und 8 (für e)):

$$1o^{-2}m^2sec^{-2} < [e] < 1o^3 m^2 sec^{-2}$$

$$1\,m^2 < [l^2] < 4\cdot 1o^6 m^2 \quad ,$$

und daraus ergibt sich

$$\frac{1}{4}\,1o^{-8}sec^{-2} < \left[\frac{e}{l^2}\right] < 1o^3 sec^{-2}$$

und

$$1o^{-7} < [\eta] < 1o^{-2} \quad .$$

Da im meteorologischen Bereich

$$\left[\frac{g^2\alpha}{c^2}\right] > 1o^{-5} sec^{-4}$$

ist, wird für nicht zu große Werte von $\frac{e}{l^2}$ die Determinante $\bar{D}_2$ negativ, und es gibt Nullstellen von (32) bzw. von (29) mit positivem Realteil. Damit ist gezeigt, daß die Turbulenzenergie e und die Mischlänge l auch im meteorologischen Bereich die Stabilität der hydro-thermodynamischen Gleichungen wesentlich beeinflussen. Für kleine e und große l ist das Differentialgleichungssystem (2o) instabil.

11 Die Näherungslösungen der Dispersionsgleichung

Die Lösungen von (31) können nicht vollständig angegeben werden, wir beschränken uns hier darauf, sie unter gewissen Voraussetzungen näherungsweise zu berechnen. Mit

$$z \underset{\text{Def.}}{=} \frac{R}{d} \quad , \quad \sigma \underset{\text{Def. } d^2}{=} \frac{\alpha}{d^2} \quad , \quad \tau = \frac{k^2 g^2}{k^2 c^2}\,\eta \qquad x)$$

bestimmen wir die Nullstellen von (31) näherungsweise mit folgenden Annahmen:

(33a) $\eta \ll 1$

(33b) $1 \ll \sigma$

(33c) $\frac{\tau}{d^2} \ll 1$

---

x) Es war $\alpha = k^2c^2$, $d^2 = \frac{3}{2}\frac{e}{l^2}$.

(33d) $\frac{\tau}{d^2} \ll \sigma\eta$

(33e) $\frac{\tau}{d^2} \ll (\sigma\eta)^2$.

Dann erhält (31) näherungsweise die Form:

(34) $z^6 + 2z^5 + \sigma z^4 + 2\sigma z^3 + \sigma(1 + \sigma\eta)z^2 + \sigma^2\eta z + \sigma\frac{\tau}{d^2} = o$,

und die genäherten Nullstellen sind

(35) $z_{1,2}^2 = -\sigma, \quad z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\sigma\eta - \frac{1}{4}}, \quad z_5 = -1, \quad z_6 = -\frac{1}{\sigma\eta}\frac{\tau}{d^2}$.

Zum Beweise setzen wir $z_{1,2}$ in (34) ein und erhalten

$-\sigma^3 \pm 2i\sqrt{\sigma}\,\sigma^2 + \sigma^3 \mp 2i\sqrt{\sigma}\,\sigma^2 - \sigma^2(1 + \sigma\eta) \pm i\sqrt{\sigma}\sigma^2\eta + \sigma\frac{\tau}{d^2} \simeq o$,

denn wegen (33a) und (33b) kann der fünfte Term gegen den ersten vernachlässigt werden, wegen (33a) vernachlässigen wir den sechsten Term gegen den zweiten und wegen (33c) und (33b) den siebenten gegen den ersten. $z_{3,4}$ und z_5 sind die Nullstellen des Polynoms

(36) $z^3 + 2z^2 + (1 + \sigma\eta)z + \sigma\eta = o$.

Für komplexe $z_{3,4}$ gilt $|z_{3,4}| = \sqrt{\sigma\eta}$, so daß beim Einsetzen von $z_{3,4}$ in (34) die ersten vier Terme die folgenden Beträge haben:

$\sigma^3\eta^3$, $2\sigma^2\eta^2\sqrt{\sigma\eta}$, $\sigma^3\eta^2$, $2\sigma^2\eta\sqrt{\sigma\eta}$.

Die ersten beiden Terme können also wegen (33a) vernachlässigt werden. Der letzte Term von (34) kann wieder wegen (33d) gegen den fünften vernachlässigt werden. Sind dagegen für

$\sigma\eta \leq \frac{1}{4}$ die $z_{3,4}$ reell, so gilt für $\sigma\eta > o$

$$\frac{1}{2} \leq |z_4| < 1$$

und

$$\sigma\eta < |z_3| \leq \frac{1}{2} ,$$

so daß in allen Fällen die ersten beiden Terme von (34) wegen (33b) gegen die übrigen vernachlässigt werden können. Im Falle der reellen z_4 bzw. z_3 kann außerdem der letzte Term von (34) wegen (33c) bzw. (33e) gegen den fünften vernachlässigt werden. Auf gleiche Weise wie bei reellem z_4 erkennt man, daß z_5 Näherungslösung von (34) ist. Wegen (33d) ist $|z_6| \ll 1$, so daß beim Einsetzen von z_6 in (34) alle Terme bis auf die letzten beiden vernachlässigt werden können.

Mit den Annahmen (33a), (33b) und (33c) spalten sich also die genäherten Nullstellen von (34) in $z_{1,2}$ und die Nullstellen von

$$(37) \qquad z^4 + 2z^3 + (1 + \sigma\eta)z^2 + \sigma\eta z + \frac{\tau}{d^2} = o$$

auf. In Abschnitt 12 ergibt sich dann (37) als Dispersionsgleichung der quasistatisch approximierten erweiterten Gleichungen (2o), so daß die Einführung der quasistatischen Approximation die Elimination der Lösungen $z_{1,2}$ oder

$$R_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha} = \pm ikc$$

bedeutet. Die Kreisfrequenz dieser Wellen ist also kc, und die Phasengeschwindigkeit ist die Schallgeschwindigkeit. Die quasistatische Approximation bewirkt also das gleiche wie im Gleichungssystem (1).

Um die Dämpfung der "Schallschwingungen" zu finden, machen wir den Ansatz

$$R = i\sqrt{\alpha} + \eta x$$

und bestimmen x in der linearen Näherung bezüglich η. Mit

$$R^2 = -\alpha + 2i\sqrt{\alpha}\eta x$$
$$R^3 = -i\alpha\sqrt{\alpha} - 3\alpha\eta x$$
$$R^4 = \alpha^2 - 4i\alpha\sqrt{\alpha}\eta x$$
$$R^5 = i\alpha^2\sqrt{\alpha} + 5\alpha^2\eta x$$
$$R^6 = -\alpha^3 + 6i\alpha^2\sqrt{\alpha}\eta x$$

erhält man bei Vernachlässigung von Gliedern mit η^2, η^3 und höheren aus (31):

$$-\alpha^3 + 6i\alpha^2\sqrt{\alpha}\eta x + 2id\alpha^2\sqrt{\alpha} + 1od\alpha^2\eta x + \alpha^3 - 4i\alpha^2\sqrt{\alpha}\eta x + 4\alpha^3\eta - 2id\alpha^2\sqrt{\alpha} -$$
$$- 6d\alpha^2\eta x - \frac{17}{3} id\alpha^2\eta\sqrt{\alpha} - \alpha^3\eta - \alpha^2 d^2 + 2id^2\alpha\sqrt{\alpha}\eta x - \frac{5}{3}\alpha^2 d^2\eta + id\alpha^2\sqrt{\alpha}\eta + a_6 = o$$

und bei Vernachlässigung von a_6 mit $d^2 = \frac{3}{2}\frac{e}{1^2} = \frac{3}{2}\eta\alpha\frac{1}{ß}$ und $ß = l^2k^2$ folgt

Def.

$$x \simeq \frac{-3\alpha(1 - \frac{1}{2ß}) + i\frac{14}{3}d\sqrt{\alpha}}{2(2d + i\sqrt{\alpha})},$$

und daraus ergibt sich:

$$Re(x) \simeq \frac{-\frac{4}{3}\alpha d + 3\frac{\alpha d}{ß}}{2\alpha} = -\frac{2}{3}d + \frac{3}{2}\frac{d}{ß}.$$

Für $ß > \frac{9}{4}$ ist also $Re(x) < o$, und die Größenordnung des Dämpfungsfaktors ist

$$\left[\eta\,\mathrm{Re}(x)\right] = \left[\eta d\right] = \left[\frac{e}{c^2}\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{e}{l^2}}\right] ,$$

so daß die Dämpfung der dritten Potenz der Schwankungsgeschwindigkeit $\sqrt{e}$ proportional ist.

Aus den Grenzen für $\left[\frac{e}{l^2}\right]$ des Abschnitts 1o ergibt sich dann die Dämpfung im Bereich

$$\eta\,\frac{1}{2}\;1o^{-4}\mathrm{sec}^{-1} < \left[\eta\,\mathrm{Re}(x)\right] < \eta\,4o\mathrm{sec}^{-1} .$$

Für $R_{3,4,5} = z_{3,4,5}\cdot d$ ist die Dämpfung in der Größenordnung d, [x]) so daß die Halbwertszeit dieser Störwellen bei den oben festgelegten Zahlenwerten zwischen 5^h und $\frac{1}{4o}$ sec liegt.

Die Größenordnung von $R_6 = z_6\cdot d$ ist

$$\left[R_6\right] = \left[\frac{\tau}{\sigma\eta d}\right] = \left[\frac{\varepsilon^2 g^2}{c^2}\,\frac{1}{k^2 l^2}\,\sqrt{\frac{\partial l^2}{\partial e}}\right] = 1o^{-9}\mathrm{sec}^{-2}\,\frac{1}{k^2 l^2}\,\sqrt{\frac{\partial l^2}{\partial e}} ,$$

sie nimmt also mit wachsender Turbulenzenergie e ab. Die Phasengeschwindigkeit von R_5 und R_6 ist in der Näherung (35) jedoch Null. Mit Ausnahme der Nullstelle R_6 nimmt also die Dämpfung der Störwellen mit wachsender Turbulenzenergie zu.

Die Nullstelle R_6 liegt dicht an der imaginären Achse, denn nehmen wir einmal folgende Größenordnungen an

$$\left[k^2 l^2\right] = 1 \quad , \quad l^2 = 1o^5 m^2 \quad , \quad e = 1m^2\mathrm{sec}^{-2} ,$$

so ergibt sich

$$\left[R_6\right] = 1o^{-7}\mathrm{sec}^{-1} ,$$

und das bedeutet eine Halbwertszeit der Störung von $\frac{1}{4}1o^7$ sec oder rund 3o Tagen. Da a_6 der statischen Stabilität

$$\frac{1}{\Theta_o}\,\frac{\partial\Theta_o}{\partial z} = a\varkappa$$

proportional ist (vergl. die Abschnitte 7 und 8), wird die numerische Stabilität auch von der statischen Stabilität beeinflußt. Setzt man dagegen $l = 1o^{-1}m$ und $e = 1o^{-2}m^2\mathrm{sec}^{-2}$ fest, so wird

$$\left[R_6\right] = 1o^{-4}\mathrm{sec}^{-1} ,$$

und die Halbwertszeit beträgt ca. 3 Stunden. Im Falle der quasistatischen erweiterten Gleichungen hätte man damit eine hinreichende Dämpfung der Störwellen im Lärmbereich, denn es wird sich in Abschnitt 12 zeigen, daß im quasistatischen Fall die Stabilität bei beliebigem l gegeben ist.

---

[x]) Falls $\sigma\eta - \frac{2}{3}\beta > \frac{1}{4}$ ist.

12 Die quasistatischen erweiterten Gleichungen

Wir führen in das erweiterte Gleichungssystem (2o) die quasistatische Approximation ein, vernachlässigen also die Vertikalgeschwindigkeit in der z-Komponente der Bewegungsgleichung. Zur Ableitung einer Dispersionsgleichung vernachlässigen wir außerdem die Erdrotation vollständig. Die Rechnungen der Abschnitte 6 und 7 sind einfach zu wiederholen, in Abschnitt 8 ist dann in (27) $\mathbb{B}_3$ zu ersetzen durch

$$\mathbb{B}'_3 = \mathbb{B}_3 - \varkappa A \frac{\partial^2}{\partial t^2} ,$$

und man erhält auf gleiche Weise wie dort

$$B' w = o$$

mit

$$B' = \varkappa \cdot \mathbb{B}_2 \nabla \cdot \mathbb{B}'_3 + (B_1 - \nabla \cdot \mathbb{B}_2)(B_1 + \varkappa \cdot \mathbb{B}'_3)$$

oder explizit

$$B' = \left[d_1 \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} - d_2 \frac{\partial}{\partial t} + d_3 \frac{\partial}{\partial z} - d_4 \right] \left[((g + ea) \frac{\partial}{\partial t} + gd)\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial^3}{\partial t^3} + d \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} + d \frac{\partial^2}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 + ea \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} - d_1 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 + d_2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} - d_3 \nabla^2 + d_4 \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[- e \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 + (g + 2ea) \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + gd \frac{\partial}{\partial z} \right] .$$

Sortieren nach Potenzen von $\frac{\partial}{\partial t}$ ergibt:

$$B' = \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left[- e\nabla^2 - (c^2 + 2e) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a(c^2 + 3e) \frac{\partial}{\partial z} \right] +$$

$$+ \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[- ed\nabla^2 - 2d(c^2 + \frac{11}{6} e) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ad(c^2 + \frac{7}{3} e) \frac{\partial}{\partial z} \right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[e(c^2 + 3e)\nabla^4 - 2ea(c^2 + 3e)\nabla^2 \frac{\partial}{\partial z} - ac^2 \varkappa (g + ea)\nabla^2 + \right.$$

$$+ ((g + ea)ac^2 \varkappa + ea^2(c^2 + 3e) - d^2(c^2 + \frac{5}{3} e)) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + ad^2(c^2 +$$

$$\left. + \frac{5}{3} e) \frac{\partial}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ed(c^2 + \frac{5}{3} e)\nabla^4 - 2ead(c^2 + \frac{5}{3} e)\nabla^2 \frac{\partial}{\partial z} - \right.$$

$$- (gdac^2 \varkappa + ad(g + ea)(c^2 \varkappa + \frac{2}{3} e))\nabla^2 + (gdac^2 \varkappa + gdea +$$

$$\left. + ad(g + 2ea)(c^2 \varkappa + \frac{2}{3} e)) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + \left[- gad^2(c^2 \varkappa + \frac{2}{3} e)\nabla_h^2 \right] .$$

Wir machen wieder den Störungsansatz (5) mit (5a), ersetzen also in B' $\frac{\partial}{\partial t}$ durch R, ∇^2 durch $-K^2$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ durch ik und können dann die entstehende Dispersionsgleichung durch größenordnungsmäßige Abschätzungen für den Lärmbereich sehr vereinfachen. Anstelle von (29) erhalten wir nun mit der Approximation $K^2 \approx k^2$

(38) $$R^4\bar{b}_o + R^3\bar{b}_1 + R^2\bar{b}_2 + R\bar{b}_3 + \bar{b}_4 = o$$

mit

$$\bar{b}_o = \alpha(1 + 3\eta) + iakc^2(1 + 3\eta)$$

$$\bar{b}_1 = 2\alpha d(1 + \tfrac{7}{3}\eta) + i2adkc^2(1 + \tfrac{7}{3}\eta)$$

$$\bar{b}_2 = \alpha^2\eta(1 + 3\eta) - \alpha\eta a^2c^2(1 + 3\eta) + \alpha d^2(1 + \tfrac{5}{3}\eta) + i2\alpha\eta ac^2k(1 + 3\eta) + iad^2kc^2(1 + \tfrac{5}{3}\eta) + (\text{?+?})ac^2\kappa K^2_{\text{?}}$$

$$\bar{b}_3 = \bar{a}_5$$

$$\bar{b}_4 = \bar{a}_6 \quad .$$ x)

Aus den Abschätzungen des Abschnitts 8 ergibt sich, durch Vergleich von $\bar{b}_i$ mit $\bar{a}_{i+2}$, daß in $\bar{b}_o, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ jeweils der zweite Term vernachlässigt werden kann, ebenso kann der vierte und fünfte *und sechste* Term von $\bar{b}_2$ vernachlässigt werden. Wir erhalten damit angenähert die Dispersionsgleichung

(39) $$R^4b_o + R^3b_1 + R^2a_4 + Ra_5 + a_6 = o$$

mit

$$b_o = \alpha(1 + 3\eta)$$

$$b_1 = 2\alpha d(1 + \tfrac{7}{3}\eta)$$

oder nach Einführung der Bezeichnungen und Näherungen des Abschnitts (11) die Dispersionsgleichung (37). Damit ist die in Abschnitt 11 schon erwähnte Behauptung bewiesen, daß (37) die Dispersionsgleichung der quasistatisch approximierten erweiterten Gleichungen ist. Die Lösungen dieser Gleichung wurden dort diskutiert, die Einführung der quasistatischen Approximation in die erweiterten Gleichungen bedeutet danach die Elimination von Störungswellen, die sich mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten.

Die vier genäherten Dispersionsgleichungen lauten noch einmal: für die vollen Gleichungen (1)

(4oa) $$R^4 + \alpha R^2 + \alpha\tau = o$$

---

x) vergl. (31)

für die quasistatischen Gleichungen

(4ob) $$\alpha R^2 + \alpha\tau = o \quad ,$$

für die erweiterten Gleichungen (2o)

(4oc) $$R^6 + 2dR^5 + \alpha R^4 + \alpha 2dR^3 + (\alpha^2\eta + \alpha d^2)R^2 + \alpha^2 d\eta R + d^2\alpha\tau = o \, ,$$

für die quasistatischen erweiterten Gleichungen

(4od) $$\alpha R^4 + \alpha 2dR^3 + (\alpha^2\eta + \alpha d^2)R^2 + \alpha^2 d\eta R + d^2\alpha\tau = o \, ,$$

und der Übergang von (40a) zu (40b) bzw. von (40c) zu (40d) bedeutet die Elimination der Lösungen $R^2 = -\alpha$, also der "Schallschwingungen". Die Bedingungen, unter denen alle Wurzeln der Dispersionsgleichung (39) links von der imaginären Achse liegen, sind leicht herzuleiten. Wir betrachten wieder nach Hurwitz (Willers [14]) die vier Determinanten: [x])

$$b_1, D_2' = \begin{vmatrix} b_1 & b_o \\ a_5 & a_4 \end{vmatrix}, \quad D_3' = \begin{vmatrix} b_1 & b_o & o \\ a_5 & a_4 & b_1 \\ o & a_6 & a_5 \end{vmatrix}, \quad D_4' = \begin{vmatrix} b_1 & b_o & o & o \\ a_5 & a_4 & b_1 & b_o \\ o & a_6 & a_5 & a_4 \\ o & o & o & a_6 \end{vmatrix} = a_6 D_3'$$

bzw.

$$D_2' = b_1 a_4 - b_o a_5 = \alpha^3 d\eta(1 + 3\eta)^2 + 2\alpha^2 d^3(1 + \tfrac{5}{3}\eta)(1 + \tfrac{7}{3}\eta) > o$$

$$D_3' = a_5 D_2' - a_6 b_1^2$$

$$= \alpha^5 d^2\eta^2(1+3\eta)^2(1 + \tfrac{5}{3}\eta) + 2\alpha^4 d^4\eta(1 + \tfrac{5}{3}\eta)^2(1 + \tfrac{7}{3}\eta) - 4\alpha^2 d^4(1 + \tfrac{7}{3}\eta)^2 \cdot$$

$$\cdot g^2 K_\lambda^2 \quad \frac{\varkappa + \frac{2}{3}\eta}{\frac{1}{\gamma} + \eta} \, ,$$

von denen nur D_3' negativ werden kann. D_3' verschwindet, falls für kleine η

$$\alpha^5 d^2\eta^2 + 2\alpha^4 d^4\eta = 4\alpha^2 d^4 g^2 K_\lambda^2 \varkappa\gamma$$

oder

$$ek^2(1 + \frac{l^2 k^2}{3}) = \frac{2g^2\varkappa\gamma}{c^2} \frac{K_\lambda^2}{k^2}$$

wird. Die Größenordnung der rechten Seite beträgt $1o^{-9}\,sec^{-2}$, so daß

---

[x]) Die Koeffizienten von (39) sind alle positiv.

im Lärmbereich $k \geq k_z^o$ die linke Seite größer und damit D_3' positiv wird, wenn

$$ek_z^{o\,2} \quad (1 + \frac{l^2 k_z^{o\,2}}{3}) > 1o^{-9}\,sec^{-2}$$

oder

$$e(1 + \frac{l^2 k_z^{o\,2}}{3}) > 1o^{-4}\,m^2\,sec^{-2}$$

erfüllt ist. Stabilität im Lärmbereich ergibt sich also für

$$[e] > 1o^{-4}\,m^2\,sec^{-2}$$

bei beliebigem l.

Da wir jedoch für die Abschätzungen der Abschnitte 8 und 12

$$[e] > 1o^{-2}\,m^2\,sec^{-2}$$

angenommen hatten, hat (39) ohne zusätzliche Bedingungen für l nur Nullstellen links von der imaginären Achse.

13 Der Einfluß einer o. Näherung mit konstantem Wind

Der Einfachheit halber vernachlässigen wir in diesem Abschnitt die Erdrotation und setzen $\Omega = o$. Eine Lösung des Gleichungssystems der o. Näherung (21) (vergl. Abschnitt 6) ist

$v^o = const$, $w^o = o$ [x]), $T_o = const$, $\mathfrak{T}^o = e\rho_o E$, $e = const$, $\rho_o = \rho_o(z)$, $p_o = p_o(z)$, wobei alle Variablen von x,y,t unabhängig sein sollen. Dann gilt $D_o = o$ angewendet auf eine o. Näherung, und man erhält genau wie in Abschnitt 7

$$\frac{1}{p_o}\frac{\partial p_o}{\partial z} = \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial \rho_o}{\partial z} = -\frac{1}{\varkappa}\frac{1}{\Theta_o}\frac{\partial \Theta_o}{\partial z} = -\frac{g}{RT_o + e}\,.$$

Angewendet auf eine 1. Näherung ist

$$D_o = \frac{\partial}{\partial t} + v_h^o \cdot \nabla_h\,,$$

und auf eine o. Näherung angewendet ist

$$D_1 = w^1 \frac{\partial}{\partial z}\,,$$

wogegen sich im Falle einer o. Näherung ohne Wind

$$D_o = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad D_1 = w^1 \frac{\partial}{\partial z}$$

ergab. Das Gleichungssystem der 1. Näherung unterscheidet sich also von (23) nur dadurch, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ durch } \frac{\partial}{\partial t} + v_h^o \cdot \nabla_h \text{ ersetzt wird.}$$

---

[x]) $v^o = (v_h^o, w^o)$, wobei v_h die Horizontalkomponente und w^o die Vertikalkomponente bedeutet.

Führt man jetzt die gleiche Rechnung noch einmal durch, die zur Ableitung der Frequenzgleichung führte, so hat man nur immer D_o statt $\frac{\partial}{\partial t}$ zu schreiben und erhält mit dem Wellenansatz (5) wieder (29), wobei jedoch R durch $R + i w_h^o \cdot \mathbb{K}_h$ zu ersetzen ist.

Damit ist bewiesen, daß die Einführung eines konstanten horizontalen Windes als o. Näherung eine Verschiebung aller Lösungen R_i der Dispersionsgleichung um $w_h^o \cdot \mathbb{K}_h$ in die negative Richtung der imaginären Achse bedeutet und damit auf den Realteil der Lösung und auf die Stabilität keinen Einfluß hat. Das gleiche kann man für die quasistatischen erweiterten Gleichungen zeigen und für die Gleichungen ohne Berücksichtigung der Reynoldsspannungen, wenn die Corioliskraft vernachlässigt wird.

14 Die kleinräumige isotrope Turbulenz

Da sich die kleinräumige isotrope Turbulenz im wesentlichen in einer Energiedissipation bemerkbar macht (vergl. Rotta [9]), untersuchen wir den Einfluß der inneren Reibung, d. h. wir wollen die Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p + 2\Omega \times w \tilde{=} \frac{\mu}{\rho}\Delta w + \nabla\Phi = o \quad (\mu = \text{Viskosität})$$

anstelle der Bewegungsgleichung (1) verwenden. In den Gleichungen für die Reynoldsspannungen (12) entstehen dann zusätzliche Terme, denn die rechte Seite der Bewegungsgleichung (7) lautet statt o:

$$\mu \Delta \bar{w} \quad ,$$

und wegen

$$\hat{w} = \bar{w} + \overline{\frac{\rho'}{\bar{\rho}} w'} \simeq \bar{w} \qquad x)$$

kann man dafür auch

$$\mu \Delta \hat{w}$$

schreiben. Die rechten Seiten der Gleichungen (8) lauten nun

$$\mu \Delta w \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mu}{\rho}\Delta w$$

und die der Gleichungen (1o):

$$\mu \Delta \hat{w} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mu}{\bar{\rho}}\Delta \hat{w} \quad .$$

Wegen

$$\overline{ww} = \hat{w}\hat{w} + \frac{1}{\bar{\rho}}\overline{\rho w' w'} - \overline{\frac{\rho'}{\bar{\rho}} ww} \simeq \hat{w}\hat{w} + \frac{1}{\bar{\rho}}\overline{\rho w' w'}$$

lautet dann die rechte Seite von (9):

---

x) vergl. Abschnitt 4

$$\mu\hat{\bar{w}}\Delta\hat{\bar{v}} + \mu(\Delta\hat{\bar{w}})\hat{\bar{v}} + \frac{\mu}{\bar{\rho}}\overline{\rho w'\Delta w'} + \frac{\mu}{\bar{\rho}}\overline{\rho(\Delta w')w'} \quad ,$$

und die rechte Seite von (12) wird:

$$\frac{\mu}{\bar{\rho}}\overline{\rho w'\Delta w'} + \frac{\kappa}{\bar{\rho}}\overline{\rho(\Delta w')w'} \quad .$$

Damit ergibt sich wegen

$$w'\nabla^2 w' + (\nabla^2 w')w' = \nabla^2 w'w' - 2w'\overleftarrow{\nabla}\cdot\nabla w'$$

und

$$\frac{\mu}{\bar{\rho}}\overline{\rho\nabla^2 w'v'} \simeq \nabla\cdot(\frac{\mu}{\bar{\rho}}\overline{\rho\nabla w'w'})$$

(16f) zu

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho w'v'} + \nabla\cdot(\hat{\bar{w}}\overline{\rho w'w'}) + \overline{\rho w'w'}\cdot\nabla\hat{\bar{v}} + \hat{\bar{v}}\overleftarrow{\nabla}\cdot\overline{\rho w'v'} + 2\Omega\times\overline{\rho w'v'} - \overline{\rho w'v'}\times 2\Omega -$$

$$(42) \qquad - \overline{p'\nabla w'} - \overline{w'\overleftarrow{\nabla}p'} + \nabla\cdot(-\frac{\mu}{\bar{\rho}}\overline{\rho\nabla w'w'} + \overline{\rho w'w'v'} + \mathbb{E}\overline{p'w'}) + (\overline{p'w'}\mathbb{E})\overleftarrow{\nabla} +$$

$$+ 2\frac{\mu}{\bar{\rho}}\overline{\rho w'\overleftarrow{\nabla}\cdot\nabla w'} = o \quad .$$

Die innere Reibung liefert also einen Beitrag zum Diffusionsterm, den wir hier vernachlässigen, und den letzten Term. Wegen der Isotropie (vergl. Rotta [9]) bedeutet dieser Term im wesentlichen eine Energiedissipation, und wir setzen mit Rotta [9], Davydov [1o]

$$(43) \qquad 2\frac{\mu}{\bar{\rho}}\overline{\rho w'\overleftarrow{\nabla}\cdot\nabla w'} = \frac{2}{3}\mathbb{E}\delta\bar{\rho}\frac{1}{l}(\frac{E_{kl}}{\bar{\rho}})^{3/2} \quad ,$$

wobei δ eine dimensionslose Konstante und E_{kl} die Turbulenzenergie der kleinräumigen isotropen Turbulenz bedeutet. Setzt man vereinfachend

$$E_{kl} = q\bar{E} \quad ,$$

wobei das Verhältnis der Energie der kleinräumigen isotropen Turbulenz zur Energie der nichthomogenen Turbulenz q eine Konstante sei, so bekommt man wegen (42) an Stelle von (2o)

$$D\hat{\bar{v}} + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\cdot\bar{\mathbb{T}} + 2\Omega\times\hat{\bar{v}} + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\bar{p} - \frac{\mu}{\bar{\rho}}\Delta\hat{\bar{v}} + \nabla\varphi = o$$

$$D\bar{\rho} + \bar{\rho}\nabla\cdot\hat{\bar{v}} = o$$

$$D\hat{\Theta} = o$$

$$(44) \qquad \hat{\Theta} = (\frac{p_s}{\bar{p}})^{\varkappa}\hat{T}$$

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\hat{T}$$

$$D\bar{\mathbb{T}} + \bar{\mathbb{T}}\nabla\cdot\hat{\bar{v}} + \bar{\mathbb{T}}\cdot\nabla\hat{\bar{v}} + \hat{\bar{v}}\overleftarrow{\nabla}\cdot\bar{\mathbb{T}} + 2\Omega\times\bar{\mathbb{T}} - \bar{\mathbb{T}}\times 2\Omega + \frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}}}\frac{\sqrt{\bar{E}}}{l}(\bar{\mathbb{T}} -$$

$$- \frac{2}{3}\mathbb{E}\bar{E}(1 - \delta q^{3/2})) = o \quad ,$$

und die zugehörige Turbulenzenergiegleichung lautet:

$$(44a) \qquad D\bar{E} + \bar{E}\nabla\cdot\hat{\mathbf{v}} + \bar{\mathbb{T}}:\nabla\hat{\mathbf{v}} + \frac{\bar{E}^{3/2}}{\sqrt{\rho}}\,\frac{2}{l}\,\delta q^{3/2} = o \quad .$$

Der Ansatz (43) ist offenbar so gemacht, daß die Turbulenzenergie nach (44a) proportional $\bar{E}^{3/2}$ abnimmt. Nun ist (vergl. Rotta[9]) für große Reynoldszahlen $\delta \ll 1$, und man kann außerdem $q \ll 1$ annehmen, so daß sich die Gleichung für die Reynoldsspannung durch die kleinräumige Turbulenz praktisch nicht ändert. Da der Term der inneren Reibung in der Bewegungsgleichung (44) ebenfalls sehr klein ist, kann also die kleinräumige isotrope Turbulenz gegenüber der nichthomogenen Turbulenz praktisch vernachlässigt werden.

Zur numerischen Integration des erweiterten Gleichungssystems (2o) stellt sich noch das Problem der Anfangsbedingungen für den Tensor $\bar{\mathbb{T}}$. Aus den übrigen Anfangsfeldern kann $\bar{\mathbb{T}}$ grundsätzlich nicht bestimmt werden, für ein numerisches Experiment besteht aber z. B. die Möglichkeit, $\bar{\mathbb{T}}$ zu Anfang als Diagonaltensor mit einer bestimmten Turbulenzenergie vorzugeben, wodurch (2o) die oben diskutierte Stabilität hat.

Anhang A:

Zur Berechnung der Determinanten des Abschnitts 9

Wir berechnen D_4 aus:

$$D_4 = a_4 D_3 - a_5 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & o \\ a_3 & a_2 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_2 \end{vmatrix} + a_6 \begin{vmatrix} a_1 & o & o \\ a_3 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

oder

$$D_4 = a_4 D_3 - a_2 a_5 D_2 + a_5 (a_1 a_4 - a_5) + a_6 a_1 D_2 \quad .$$

Nun ist

$$D_3 = 4\alpha^2 d^2 \eta (\frac{2}{3} + \frac{41}{36}\eta) - 4\alpha d^4 (1 + \frac{5}{3}\eta) \quad ,$$

und es folgt

$$a_4 D_3 = 4\alpha^4 d^2 \eta^2 (\frac{2}{3} + \frac{41}{36}\eta)(1 + 3\eta) - 4\alpha^3 d^4 \eta (\frac{1}{3} + \frac{67}{36}\eta)(1 + \frac{5}{3}\eta) -$$
$$- 4\alpha^2 d^6 (1 + \frac{5}{3}\eta)^2 \quad .$$

Ferner ergibt sich

$$a_2 a_5 D_2 = \frac{7}{3} \alpha^4 d^2 \eta^2 (1 + 4\eta)(1 + \frac{5}{3}\eta)$$

und

$$a_1 a_4 - a_5 = \alpha^2 d\eta (1 + \frac{13}{3}\eta) + 2\alpha d^3 (1 + \frac{5}{3}\eta) \quad ,$$

also ist

$$a_5 (a_1 a_4 - a_5) = \alpha^4 d^2 \eta^2 (1 + \frac{13}{3}\eta)(1 + \frac{5}{3}\eta) + 2\alpha^3 d^4 \eta (1 + \frac{5}{3}\eta)^2 \quad .$$

Summiert man die vier Ausdrücke, so erhält man:

$$D_4 \simeq \frac{4}{3} \alpha^4 d^2 \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha^3 d^4 \eta - 4\alpha^2 d^6 + a_1 a_6 D_2 \quad .$$

Wir berechnen D_5 nach der Formel

$$D_5 = a_5 D_4 - a_6 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & o & o \\ a_3 & a_2 & a_1 & o \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_1 \\ o & a_6 & a_5 & a_3 \end{vmatrix} = a_5 D_4 - a_3 a_6 D_3 + a_1 a_6 \begin{vmatrix} a_1 & 1 & o \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ o & a_6 & a_5 \end{vmatrix}$$

oder

$$D_5 = a_5 D_4 - a_3 a_6 D_3 + a_1 a_5 a_6 D_2 - a_1^3 a_6^2 \quad .$$

Nun wird

$$2a_1 a_5 D_2 - a_3 D_3 \simeq -\frac{16}{3} \alpha^3 d^3 \eta + 8\alpha^2 d^5 \quad ,$$

denn es ist

$$a_1 a_5 D_2 = \frac{14}{3}\alpha^3 d^3 \eta^2 (1 + \frac{5}{3}\eta) \quad ,$$

und man erhält:

$$D_5 = a_5\left[a_4 D_3 - a_2 a_5 D_2 + a_5(a_1 a_4 - a_5)\right] - \frac{16}{3}\alpha^3 d^3 \eta a_6 + 8\alpha^2 d^5 a_6 - 8 d^3 a_6^2 \quad .$$

Anhang B:

Die Abschätzung von D_5 aus Abschnitt 9

Es ist

$$\left[\frac{\frac{16}{3}\alpha^3 d^3 \eta a_6}{\frac{4}{3}\alpha^6 d^3 \eta^3}\right] = \left[4\,\frac{a_6 c^4}{c^6 k^6 e^2}\right] = \left[\frac{4\varkappa\gamma d^2 \varepsilon^2 g^2 k^2}{c^2 k^6 e^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{6\varkappa\gamma \varepsilon^2 g^2}{(l^2 k^2) c^2 k^2 e}\right] \leq \frac{6\varkappa\gamma\, 10^{-4} m^2 \varkappa l^{-2}}{[l^2 k^2][e]} < 3\varkappa\gamma\, 10^{-2}$$

für $[e] > 10^{-2} m^2 \sec^{-2}$ und $\{l^2 k^2\} > 1$, und damit ist die Summe der ersten beiden Glieder von D_5 positiv. Andererseits ist der letzte Term klein gegen den vorletzten, denn es gilt:

$$\left[\frac{a_6}{\alpha^2 d^2}\right] = \left[\frac{\varepsilon^2 g^2}{c^4 k^2}\varkappa\gamma\right] \leq \left[\frac{\varepsilon^2 g^2}{4 k_z^2}\varkappa\gamma\right] = \varkappa\gamma \cdot 10^{-9} \quad .$$

Damit ist gezeigt, daß D_5 für $k^2 l^2 > 1$ positiv ist.

Literatur

[1] A. Eliassen, E. Kleinschmidt: Dynamic Meteorology
Handbuch der Physik 48, Berlin (1957)

[2] W. Edelmann, H. Reiser
Contract AF 61 (052)-373, TN 3-7 (1961-1963)

[3] K. Hinkelmann: Der Mechanismus des meteorologischen Lärmes
Tellus 3, 283 (1951)

Noncharacteristic Filtering of Meteorological Noise Waves
Beitr. z. Phys. d. Atm. 35, 252 (1962)

[4] G. Hollmann: Zur Frage der Lärmfilterung in den hydro-thermodynamischen Gleichungen
Beitr. z. Phys. d. Atm. 31, 5 (1958)

[5] W. Edelmann: Vergleich verschiedener nichtgeostrophischer Modelle der Atmosphäre mit Hilfe von Lösungen der linearisierten Modellgleichungen
Meteorol. Abhandl. 6, 1 (1958)

[6] Y. Ogura, N. A. Philipps: Scale Analysis of Deep and Shallow Convection in the Atmosphere
J. Atm. Sc. 19, 173 (1962)

[7] R. W. Stewart: The Natural Occurrence of Turbulence
J. Geophys. Res. 64, 2112 (1959)

[8] G. K. Batchelor: The Theory of Homogeneous Turbulence
Cambridge (1959)

[9] J. Rotta: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz
Z. Phys. 129, 547 (1951)
Z. Phys. 131, 51 (1951)

[10] B. I. Davydov: On the Statistical Dynamics of an Incompressible Turbulent Fluid
Soviet Physics Doklady 4, 769 (1960)

[11] J. O. Hinze: Turbulence
McGraw Hill, New York (1959)

[12] J. G. Charney: On the Scale of Atmospheric Motions
Geofys. Publ. 17, No. 2 (1948)

[13] C. L. Godske, T. Bergeron, J. Bjerknes, R. C. Bundgaard:
Dynamic Meteorology and Weather Forecasting
Washington (1957)

[14] F. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis
Berlin (1957)

[15] H. Bilharz: Z. angew. Math. Mech. 24, 77 (1944) .

Herrn Prof. Dr. Fortak danke ich für die Anregung zu diesem Thema und für viele aufschlußreiche und klärende Diskussionen.

Lebenslauf

Ich wurde am 3o. April 1934 als Sohn des Landwirts Erich Scherz in Neuruppin geboren, besuchte die Volksschule in Berlin-Wilmersdorf und danach bis 1945 eine Herrmann-Lietz-Schule in Thüringen. Meine Eltern wurden 1945 enteignet und 1947 aus Neuruppin ausgewiesen. Von 1947 bis zur Reifeprüfung im Jahre 1953 besuchte ich die Goethe-Oberschule in Berlin-Wilmersdorf. Von 1953 bis Ende 1954 hielt ich mich dann in Süd-West-Afrika auf und studierte vom Sommersemester 1955 bis zum Wintersemester 1961/62 an der Freien Universität Berlin Physik. Meine Hochschullehrer waren die Herren Professoren Dinghas, Fortak, Grotemeyer, Honerjäger, Jahr, Lassen, Ludwig, Päsler, Ritter, Stein und Überreiter. Die Diplomarbeit habe ich im Institut von Herrn Prof. Ludwig angefertigt. Im August 1962 heiratete ich Fräulein Marianne Gräfe. Seit 1962 bin ich als Assistent am Institut für Theoretische Meteorologie der Freien Universität Berlin beschäftigt, und habe die Dissertation dort bei Herrn Prof. Fortak angefertigt.